Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 3 : Algèbre linéaire.
(Applications linéaires et Matrices)

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Applications linéaires

Définition

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est linéaire si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \ \forall x, y \in \mathbb{E}\,,\quad \text{on a : } f\left(\lambda x + y\right) = \lambda f(x) + f(y)\,.$$

Applications linéaires

Définition

Soient $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application f de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{F}$ est linéaire si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \ \forall x, y \in \mathbb{E}\,,\quad \text{on a : } f\left(\lambda x + y\right) = \lambda f(x) + f(y)\,.$$

Exemples

L'application $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}$ de $\mathbb{E}$ dans lui-même définie par $\mathrm{Id}_{\mathbb{E}}(x) := x$ est linéaire.
L'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x_1, \cdots, x_n) := x_1 + \cdots + x_n$ est linéaire.
L'application Tr de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ qui, à une matrice, associe sa trace est également linéaire.

Vocabulaire

Endomorphisme

Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même est un endomorphisme.

Vocabulaire

Endomorphisme

Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même est un endomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) := \overline{z}$.

Vocabulaire

Endomorphisme

Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même est un endomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) := \overline{z}$.

Isomorphisme

Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ est un isomorphisme.

Vocabulaire

Endomorphisme

Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même est un endomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) := \overline{z}$.

Isomorphisme

Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ est un isomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(z) := (\mathrm{Re}(z); \mathrm{Im}(z))$.

Vocabulaire

Endomorphisme

Une application linéaire de $\mathbb{E}$ dans lui-même est un endomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) := \overline{z}$.

Isomorphisme

Une application linéaire bijective de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{F}$ est un isomorphisme.

Exemple

L'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(z) := (\mathrm{Re}(z); \mathrm{Im}(z))$.

Définition

On dit que $\mathbb{E}$ est isomorphe à $\mathbb{F}$ s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre.

Théorème de la dimension

Image

On appelle “image de f” :

$$\operatorname{Im} f := \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{F}\,.$$

Théorème de la dimension

Image

On appelle “image de f” :

$$\operatorname{Im} f := \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{F} .$$

Noyau

On appelle “noyau de f” :

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in \mathbb{E} \mid f(x) = 0\} .$$

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$ tandis que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. On appelle “rang de f” : $\operatorname{rg}(f) := \dim \operatorname{Im} f$.

Théorème de la dimension

Image

On appelle “image de f” :

$$\operatorname{Im} f := \{f(x)\ ;\ x \in \mathbb{E}\} \subset \mathbb{F}\,.$$

Noyau

On appelle “noyau de f” :

$$\operatorname{Ker} f := \{x \in \mathbb{E} \mid f(x) = 0\}\ .$$

$\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}$ tandis que $\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. On appelle “rang de f” : $\operatorname{rg}(f) := \dim \operatorname{Im} f$.

Théorème du rang

$\dim \mathbb{E} = \dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \operatorname{rg}(f) + \dim \operatorname{Ker} f$.

Déterminer une application linéaire

Résultat

Soient $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_p\}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\{f_1\,;\,\cdots\,;\,f_n\}$ une base de $\mathbb{F}$. Alors connaître les coordonnées des p vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base $\{f_1\,;\,\cdots\,;\,f_n\}$ est suffisant pour caractériser l'application linéaire f.

Déterminer une application linéaire

Résultat

Soient $\{e_1 ; \cdots ; e_p\}$ une base de $\mathbb{E}$ et $\{f_1 ; \cdots ; f_n\}$ une base de $\mathbb{F}$. Alors connaître les coordonnées des p vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base $\{f_1 ; \cdots ; f_n\}$ est suffisant pour caractériser l'application linéaire f.

Démonstration

On suppose connues les coordonnées des p vecteurs $f(e_1), \cdots, f(e_p)$ dans la base $\{f_1 ; \cdots ; f_n\}$:

$$f(e_j) = a_{1,j}f_1 + a_{2,j}f_2 + \cdots + a_{n-1,j}f_{n-1} + a_{n,j}f_n\,.$$

Soit un vecteur quelconque x de $\mathbb{E}$. Il existe $\alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_p e_p$ d'où :

$$f(x) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\alpha_j f_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\alpha_j\right) f_i$$

Plan

Matrice d'une application linéaire

On connaît donc l'application linéaire f si l'on connait :

$$\overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}}^{f(e_1)} ; \cdots ; \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}}^{f(e_j)} ; \cdots ; \overbrace{\begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{i,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix}}^{f(e_p)}$$

Pour simplifier l'écriture, on met tous les coefficients dans un tableau à n lignes et p colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Terminologie

Matrice

Ce tableau est appelé la matrice de l'application linéaire f.

Terminologie

Matrice

Ce tableau est appelé la matrice de l'application linéaire f.

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice M est égal au rang de son application linéaire.

Terminologie

Matrice

Ce tableau est appelé la matrice de l'application linéaire f.

Rang d'une matrice

Le rang d'une matrice M est égal au rang de son application linéaire.

Notation

Pour simplifier, on écrit

$$M = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} .$$

M est alors une matrice à n lignes et p colonnes.
On appelle $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{R}$. On note : $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$.

Transposée

Transposée

La transposée de M est

$$M^T := (a_{j,i})\ 1 \leq i \leq n\,,\ 1 \leq j \leq p\,.$$

M^T est alors une matrice à p lignes et n colonnes.

Plan

Matrices carrées

Définition

Matrices ayant autant de lignes que de colonnes :

$$M := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Trace

On définit la trace comme étant la somme des éléments diagonaux :

$$\mathrm{Tr}\,(M) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\,.$$

Matrices symétriques

Matrices carrées réelles telles que $M = M^T$: $a_{i,j} = a_{j,i}$. Exemple :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales

Les matrices diagonales sont des matrices carrées telles que les coefficients hors diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Exemple :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales

Les matrices diagonales sont des matrices carrées telles que les coefficients hors diagonale sont nuls : $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Exemple :

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Les matrices diagonales jouent un rôle particulier puisqu'il est facile de les multiplier, de calculer leurs puissances et leur exponentielle. On cherche autant que faire se peut à travailler avec.

Matrices triangulaires

Remarque

On ne peut pas toujours travailler avec des matrices diagonales mais si l'on travaille dans $\mathbb{C}$, on peut toujours se ramener à une matrice triangulaire supérieure (ou une matrice triangulaire inférieure).

Matrices triangulaires

Remarque

On ne peut pas toujours travailler avec des matrices diagonales mais si l'on travaille dans $\mathbb{C}$, on peut toujours se ramener à une matrice triangulaire supérieure (ou une matrice triangulaire inférieure).

Définition

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée telle que $a_{i,j} = 0$ si $i > j$:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -7 \\ 0 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matrices identités

La matrice identité est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n lorsque l'on est en dimension n :

$$I_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices identités

La matrice identité est une matrice diagonale dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n lorsque l'on est en dimension n :

$$I_4 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il s'agit aussi de l'élément neutre pour la multiplication des matrices.

Matrices nulles

La matrice nulle est une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note O_n lorsque l'on est en dimension n :

$$O_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices nulles

La matrice nulle est une matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 0. On la note O_n lorsque l'on est en dimension n :

$$O_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit aussi de l'élément neutre pour l'addition des matrices.

Vecteurs lignes/colonnes

Vecteur ligne

Un vecteur ligne est une matrice ayant une unique ligne et p colonnes.

Vecteurs lignes/colonnes

Vecteur ligne

Un vecteur ligne est une matrice ayant une unique ligne et p colonnes.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Vecteurs lignes/colonnes

Vecteur ligne

Un vecteur ligne est une matrice ayant une unique ligne et p colonnes.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Vecteur colonne

Un vecteur colonne est une matrice ayant une unique colonne et n lignes.

Vecteurs lignes/colonnes

Vecteur ligne

Un vecteur ligne est une matrice ayant une unique ligne et p colonnes.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Vecteur colonne

Un vecteur colonne est une matrice ayant une unique colonne et n lignes.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Plan

Addition

L'addition de deux matrices se fait coefficient à coefficient :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & a_{1,4}+b_{1,4} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & a_{2,4}+b_{2,4} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} & a_{3,4}+b_{3,4} \end{pmatrix}$$

Addition

L'addition de deux matrices se fait coefficient à coefficient :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & a_{1,4}+b_{1,4} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & a_{2,4}+b_{2,4} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} & a_{3,4}+b_{3,4} \end{pmatrix}$$

Les matrices doivent avoir le même nombre de lignes et de colonnes.

Addition

L'addition de deux matrices se fait coefficient à coefficient :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & a_{1,3}+b_{1,3} & a_{1,4}+b_{1,4} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & a_{2,3}+b_{2,3} & a_{2,4}+b_{2,4} \\ a_{3,1}+b_{3,1} & a_{3,2}+b_{3,2} & a_{3,3}+b_{3,3} & a_{3,4}+b_{3,4} \end{pmatrix}$$

Les matrices doivent avoir le même nombre de lignes et de colonnes.

La multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ s'effectue sur chaque coefficient :

$$\lambda. \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda.a_{1,1} & \lambda.a_{1,2} & \lambda.a_{1,3} & \lambda.a_{1,4} \\ \lambda.a_{2,1} & \lambda.a_{2,2} & \lambda.a_{2,3} & \lambda.a_{2,4} \\ \lambda.a_{3,1} & \lambda.a_{3,2} & \lambda.a_{3,3} & \lambda.a_{3,4} \end{pmatrix}$$

Propriétés de l'addition

Groupe

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes muni de l'addition matricielle est un groupe abélien. Et, muni de la multiplication par un scalaire, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Propriétés de l'addition

Groupe

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes muni de l'addition matricielle est un groupe abélien. Et, muni de la multiplication par un scalaire, c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Pour les matrices carrées, on a de plus :

$$\mathrm{Tr}\,(A+B) = \mathrm{Tr}\,(A) + \mathrm{Tr}\,(B) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}\,(\lambda.A) = \lambda.\mathrm{Tr}\,(A)\ .$$

La trace est donc une application linéaire de $\mathcal{M}_n\,(\mathbb{R})$ vers $\mathbb{R}$.
On a également : $(A+B)^T = A^T + B^T$.

Définition du produit de deux matrices

Rappel

Une matrice est associée à une application linéaire. Ainsi, si f est une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension p vers un espace vectoriel n, la matrice associée est un tableau à n lignes et p colonnes, les n coordonnées dans la nouvelle base des images par f de l'ancienne base.

Définition du produit de deux matrices

Rappel

Une matrice est associée à une application linéaire. Ainsi, si f est une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension p vers un espace vectoriel n, la matrice associée est un tableau à n lignes et p colonnes, les n coordonnées dans la nouvelle base des images par f de l'ancienne base.

Définition

On définit le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ comme étant la matrice associée à la composée des deux applications linéaires associées.

Définition du produit de deux matrices

Rappel

Une matrice est associée à une application linéaire. Ainsi, si f est une application linéaire d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ de dimension p vers un espace vectoriel n, la matrice associée est un tableau à n lignes et p colonnes, les n coordonnées dans la nouvelle base des images par f de l'ancienne base.

Définition

On définit le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{q,r}$ comme étant la matrice associée à la composée des deux applications linéaires associées.

Première remarque

On en déduit immédiatement que le produit $A \times B$ n'est défini que si $p = q$ et alors la matrice produit $A \times B$ est dans $\mathcal{M}_{n,r}$.

Formule pour le produit

On peut montrer que le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ est une matrice C dans $\mathcal{M}_{n,q}$ dont chaque coefficient $c_{i,j}$ est égal à

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \,.$$

Formule pour le produit

On peut montrer que le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ est une matrice C dans $\mathcal{M}_{n,q}$ dont chaque coefficient $c_{i,j}$ est égal à

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \, .$$

Matrices carrées

On peut toujours multiplier deux matrices carrées de même taille entre elles, dans un sens ou dans l'autre.

Formule pour le produit

On peut montrer que le produit d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}$ par une matrice $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ est une matrice C dans $\mathcal{M}_{n,q}$ dont chaque coefficient $c_{i,j}$ est égal à

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j} \, .$$

Matrices carrées

On peut toujours multiplier deux matrices carrées de même taille entre elles, dans un sens ou dans l'autre.

Propriétés

$\mathrm{Tr}\,(A \times B) = \mathrm{Tr}\,(B \times A)$. Et : $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

Remarques importantes sur le produit

Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques importantes sur le produit

Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. Exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et, une matrice est inversible pour le produit si et seulement si le rang de la matrice (en d'autres termes, la dimension de l'image de son application linéaire associée) est égal à n. Ainsi, une matrice est inversible si et seulement si ses vecteurs colonnes (ou ses vecteurs lignes) forment une famille libre dans $\mathbb{R}^n$.

Plan

Définition

Par définition, le déterminant... détermine. Il détermine en particulier l'inversibilité ou non de la matrice. On le définit comme étant une application multi-linéaire de la matrice.

Définition

Par définition, le déterminant... détermine. Il détermine en particulier l'inversibilité ou non de la matrice. On le définit comme étant une application multi-linéaire de la matrice.

Exemple

On considère une matrice carrée de n lignes et n colonnes. On appelle $C_1, \cdots, C_n$ ses n colonnes. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, \lambda.C_i + C_i', C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
=&\lambda \mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
&+ \mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \cdots, C_n\right) .
\end{aligned}$$

Définition

Par définition, le déterminant... détermine. Il détermine en particulier l'inversibilité ou non de la matrice. On le définit comme étant une application multi-linéaire de la matrice.

Exemple

On considère une matrice carrée de n lignes et n colonnes. On appelle $C_1, \cdots, C_n$ ses n colonnes. On a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, \lambda.C_i + C_i', C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
=&\lambda\mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
&+ \mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i', C_{i+1}, \cdots, C_n\right) .
\end{aligned}$$

On suppose également que le déterminant est nul dès que deux colonnes sont égales d'où :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i + \lambda.C_k, C_{i+1}, \cdots, C_n\right) \\
&= \mathrm{Det}\left(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_i, C_{i+1}, \cdots, C_n\right)
\end{aligned}$$

si $k \neq i$. Enfin, on suppose $\mathrm{Det}\left(I_n\right) = 1$.

Calcul pratique 1

Définition calculatoire

$$\mathrm{Det}\,(A) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\,.$$

Calcul pratique 1

Définition calculatoire

$$\mathrm{Det}\,(A) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\,.$$

Peu pratique...

Calcul pratique 1

Définition calculatoire

$$\mathrm{Det}\,(A) := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^{\mathrm{Inv}(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}\,.$$

Peu pratique...

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := ad - bc\,.$$

Calcul pratique 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right)$$

Calcul pratique 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right)$$

se calcule par la méthode de Sarrus (NE FONCTIONNE PAS SI $N \geq 4$! !). On réécrit les deux premières lignes en dessous de la matrice. On prend la somme des trois nombres obtenus en effectuant le produit des trois diagonales descendantes et l'on retranche les trois nombres obtenus en effectuant le produit des trois diagonales ascendantes.

Calcul pratique 2

Dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\mathrm{Det}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}\right)$$

se calcule par la méthode de Sarrus (NE FONCTIONNE PAS SI $N \geq 4$! !). On réécrit les deux premières lignes en dessous de la matrice. On prend la somme des trois nombres obtenus en effectuant le produit des trois diagonales descendantes et l'on retranche les trois nombres obtenus en effectuant le produit des trois diagonales ascendantes.

En dimension quelconque

On effectue le pivot de Gauss (opérations sur les lignes de la matrice) pour simplifier le calcul du déterminant.

Exemple de calcul de déterminant par le pivot 1

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & (L_1) \\
1 & 1 & -1 & -1 & (L_2) \\
1 & -1 & 1 & -1 & (L_3) \\
1 & -1 & -1 & 1 & (L_4)
\end{array}$$

On encadre le pivot que l'on choisit puis l'on applique les opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{cccc|l}
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & (L_1) \\
0 & 0 & -2 & -2 & (L_2) - (L_1) \\
0 & -2 & 0 & -2 & (L_3) - (L_1) \\
0 & -2 & -2 & 0 & (L_4) - (L_1)
\end{array}$$

Exemple de calcul de déterminant par le pivot 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que précédemment :

$$\begin{array}{cccc|l}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\
0 & 0 & -2 & -2 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & (L_3) \\
0 & 0 & -2 & 2 & (L_4) - (L_3)
\end{array}$$

Exemple de calcul de déterminant par le pivot 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que précédemment :

$$\left.\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) - (L_3) \end{array}$$

Puis :

$$\left.\begin{array}{cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} (L_1) + \frac{1}{2}(L_2) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) - (L_2) \end{array}$$

Exemple de calcul de déterminant par le pivot 3

Puis :

$$\begin{array}{cccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & (L_4) \end{array}$$

Exemple de calcul de déterminant par le pivot 3

Puis :

$$\begin{array}{cccc|l} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 0 & (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & (L_4) \end{array}$$

On calcule ensuite le déterminant en développant par rapport à la première colonne.

Développement par rapport à une colonne (ou une ligne)

Si une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0, on peut utiliser la formule suivante :

Développement par rapport à une colonne (ou une ligne)

Si une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathrm{Det}\left(A\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\mathrm{Det}\left(\widetilde{A_{i,k}}\right)$$

où $\widetilde{A_{i,k}}$ est la matrice A à laquelle on a enlevé la ligne i et la colonne k.

Développement par rapport à une colonne (ou une ligne)

Si une ligne ou une colonne contient beaucoup de 0, on peut utiliser la formule suivante :

$$\mathrm{Det}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{i+k}\mathrm{Det}\left(\widetilde{A_{i,k}}\right)$$

où $\widetilde{A_{i,k}}$ est la matrice A à laquelle on a enlevé la ligne i et la colonne k.

De même :

$$\mathrm{Det}\,(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}(-1)^{k+j}\mathrm{Det}\left(\widetilde{A_{k,j}}\right)$$

où $\widetilde{A_{k,j}}$ est la matrice A à laquelle on a enlevé la ligne k et la colonne j.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
- $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA) = \mathrm{Det}\,(A)\,\mathrm{Det}\,(B)$.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
- $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA) = \mathrm{Det}\,(A)\,\mathrm{Det}\,(B)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
- $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA) = \mathrm{Det}\,(A)\,\mathrm{Det}\,(B)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
- $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA) = \mathrm{Det}\,(A)\,\mathrm{Det}\,(B)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.
- $\mathrm{Det}\,(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{Det}(A)$.

Quelques propriétés

- Si le déterminant est nul, la matrice est non inversible.
- Si le déterminant est non nul, la matrice est inversible.
- $\mathrm{Det}\,(AB) = \mathrm{Det}\,(BA) = \mathrm{Det}\,(A)\,\mathrm{Det}\,(B)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit des éléments diagonaux.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit des éléments diagonaux.
- $\mathrm{Det}\,(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{Det}(A)$.
- $\mathrm{Det}\left(A^T\right) = \mathrm{Det}(A)$.

Plan

Définition

Par définition, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$. On note A^{-1} cette matrice inverse (si elle existe).

Inversion par le pivot de Gauss

On peut procéder par le pivot de Gauss. Reprenons notre exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Inversion par le pivot de Gauss

On peut procéder par le pivot de Gauss. Reprenons notre exemple :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On met la matrice identité à droite de la matrice initiale et on les sépare par un trait vertical. Puis, l'on effectue le pivot de Gauss jusqu'à obtenir la matrice identité à gauche. On aura alors l'inverse de A à droite.

Exemple d'inversion de matrice par le pivot de Gauss 1

$$\begin{array}{cccc|cccc l}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & (L_1) \\
1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & (L_2) \\
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & (L_3) \\
1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & (L_4)
\end{array}$$

On encadre le pivot que l'on choisit puis l'on applique les opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{cccc|cccc l}
\boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & (L_1) \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & (L_2)-(L_1) \\
0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & (L_3)-(L_1) \\
0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & (L_4)-(L_1)
\end{array}$$

Exemple d'inversion de matrice par le pivot de Gauss 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cccc l}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & (L_3) \\
0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & (L_4) - (L_3)
\end{array}$$

Exemple d'inversion de matrice par le pivot de Gauss 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cccc l}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & (L_1)+\frac{1}{2}(L_3) \\
0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & (L_3) \\
0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & (L_4)-(L_3)
\end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cccc l}
\boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & (L_1)+\frac{1}{2}(L_2) \\
0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & (L_3) \\
0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 & (L_4)-(L_2)
\end{array}$$

Exemple d'inversion de matrice par le pivot de Gauss 3

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ (L_4) \end{array}$$

Exemple d'inversion de matrice par le pivot de Gauss 3

Puis :

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\ (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\ (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\ (L_4) \end{array}$$

Et enfin :

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (L_1) \\ -\frac{1}{2}(L_3) \\ -\frac{1}{2}(L_2) \\ \frac{1}{4}(L_4) \end{array}$$

Puis :

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & 0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & \boxed{\text{-2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 1 & -1 & -1 & 1
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}
(L_1)+\frac{1}{4}(L_4) \\
(L_2)+\frac{1}{2}(L_4) \\
(L_3)+\frac{1}{2}(L_4) \\
(L_4)
\end{array}$$

Et enfin :

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4}
\end{array}\right. \quad \begin{array}{l}
(L_1) \\
-\frac{1}{2}(L_3) \\
-\frac{1}{2}(L_2) \\
\frac{1}{4}(L_4)
\end{array}$$

La matrice à droite du trait vertical est l'inverse de la matrice de départ.

Plan

Matrices diagonales

Si la matrice D est diagonale,

$$D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

alors :

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \exp[D] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

On suppose bien sûr $\lambda_i \neq 0$ pour prendre l'inverse de D.

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition d'une valeur propre

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{E}$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$. En d'autres termes, λ est une valeur propre de f si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition d'une valeur propre

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{E}$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$. En d'autres termes, λ est une valeur propre de f si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Définition d'un vecteur propre

On dit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si $v \in \mathbb{E}$ est tel que $f(v) = \lambda v$ et $v \neq 0$. Puis,
$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ est le sous-espace propre associé.

Valeurs propres et vecteurs propres

Définition d'une valeur propre

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{E}$. On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $v \in \mathbb{E}$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$. En d'autres termes, λ est une valeur propre de f si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$.

Définition d'un vecteur propre

On dit que v est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si $v \in \mathbb{E}$ est tel que $f(v) = \lambda v$ et $v \neq 0$. Puis,
$\mathrm{Ker}\,(f - \lambda \mathrm{Id}) \neq \{0\}$ est le sous-espace propre associé.

Valeur propre d'une matrice

On dit que λ est une valeur propre de la matrice M si λ est une valeur propre de l'application linéaire associée.

Trouver les valeurs propres

Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de la matrice M est le polynôme $\chi_M(X) := \mathrm{Det}\,(M - XI_n)$. Soit f l'application linéaire associée à M. On appelle polynôme caractéristique de f, et on note χ_f, le polynôme χ_M. Les racines du polynôme χ_f correspondent aux valeurs propres de f, par définition.

Trouver les valeurs propres

Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de la matrice M est le polynôme $\chi_M(X) := \mathrm{Det}\,(M - XI_n)$. Soit f l'application linéaire associée à M. On appelle polynôme caractéristique de f, et on note χ_f, le polynôme χ_M. Les racines du polynôme χ_f correspondent aux valeurs propres de f, par définition.

Exemple

Soit $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors,
$\chi_M(X) = X^2 - 2X - 1 = \left(X - (1+\sqrt{2})\right)\left(X - (1-\sqrt{2})\right)$. Les valeurs propres de M sont donc $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

Trouver les valeurs propres

Polynôme caractéristique

Le polynôme caractéristique de la matrice M est le polynôme $\chi_M(X) := \mathrm{Det}\,(M - XI_n)$. Soit f l'application linéaire associée à M. On appelle polynôme caractéristique de f, et on note χ_f, le polynôme χ_M. Les racines du polynôme χ_f correspondent aux valeurs propres de f, par définition.

Exemple

Soit $M := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors,
$\chi_M(X) = X^2 - 2X - 1 = \left(X - (1+\sqrt{2})\right)\left(X - (1-\sqrt{2})\right)$. Les valeurs propres de M sont donc $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

Spectre

On apppelle spectre de M, et on note $\mathrm{Sp}\,(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M.

Définition

Vecteurs propres

On cherche ensuite les vecteurs propres associés à λ en résolvant $(M - \lambda I_n)\, v = 0$.

Définition

Vecteurs propres

On cherche ensuite les vecteurs propres associés à λ en résolvant $(M - \lambda I_n)\, v = 0$.

Définition

Soit M une matrice carrée $n \times n$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_d$ ses valeurs propres. On introduit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{F} := \mathrm{Ker}\,(M - \lambda_1 I_n) + \cdots + \mathrm{Ker}\,(M - \lambda_d I_n)\ .$$

Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}^n$, on dit que la matrice M est diagonalisable. Et, alors, il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telle que $M = PDP^{-1}$.

En pratique

Étape 1

On calcule le polynôme caractéristique χ_M.

En pratique

Étape 1

On calcule le polynôme caractéristique χ_M.

Étape 2

Les racines de χ_M correspondent aux valeurs propres.

En pratique

Étape 1

On calcule le polynôme caractéristique χ_M.

Étape 2

Les racines de χ_M correspondent aux valeurs propres.

Étape 3

On cherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

En pratique

Étape 1

On calcule le polynôme caractéristique χ_M.

Étape 2

Les racines de χ_M correspondent aux valeurs propres.

Étape 3

On cherche les vecteurs propres associés aux valeurs propres.

Étape 4

Si M est diagonalisable, on a une base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de vecteurs propres de M avec $Mv_i = \lambda_i v_i$. On écrit la matrice associée à cette base : $P := ((p_{i,j}))$ où $p_{i,j}$ est la j-ème coordonnée du vecteur v_i. Alors : $M = PDP^{-1}$ où D est la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres.

Preuve

On note $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par définition, on a $Pe_i = v_i$ d'où $P^{-1}v_i = e_i$. Comme $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \, .$$

D'où

$$\begin{aligned}
PDP^{-1}v &= PDP^{-1}\left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\right) \\
&= PD\left(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\right) \\
&= P\left(\alpha_1 \lambda_1 e_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n e_n\right) \\
&= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n v_n \\
&= M\left(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n\right) \\
&= Mv \, .
\end{aligned}$$