Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 3 : Algèbre linéaire.
(Espaces vectoriels et systèmes linéaires)

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Introduction

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 & & (E_1) \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 2 & & (E_2) \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 4 & & (E_3) \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 8 & & (E_4) \end{array}\right.$$

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 2 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 4 \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c} (E_1) \\ (E_2) \\ (E_3) \\ (E_4) \end{array}$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il est linéaire, car chaque équation est du type $ax + by + cz + dt = e$. En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

Problème

Trouver tous les quadruplets de nombres réels (x, y, z, t) tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 & \qquad & (E_1) \\ x & + & y & - & z & - & t & = & 2 & & (E_2) \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 4 & & (E_3) \\ x & - & y & - & z & + & t & = & 8 & & (E_4) \end{array}\right.$$

Il s'agit d'un système de 4 équations à 4 inconnues. Il est linéaire, car chaque équation est du type $ax + by + cz + dt = e$. En particulier, il ne figure ni produit, ni puissance des inconnues.

L'objet de cette section est de décrire une méthode systématique de résolution de ce type de système, appelée méthode du pivot de Gauss.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1). En effet, le pivot est sur la première équation.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1). En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1). En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) - (E_1)$.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1). En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) - (E_1)$.
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_1)$.

Étape 1

On élimine l'inconnue x des équations (E_2), (E_3) et (E_4) en effectuant les opérations suivantes :

- On remplace (E_1) par (E_1). En effet, le pivot est sur la première équation.
- On remplace (E_2) par $(E_2) - (E_1)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) - (E_1)$.
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_1)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ & & & - & 2z & - & 2t & = & 2 \\ & - & 2y & & & - & 2t & = & 4 \\ & - & 2y & - & 2z & & & = & 8 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} (E_1) \\ (E_2) - (E_1) \\ (E_3) - (E_1) \\ (E_4) - (E_1) \end{array}$$

Étape 2

On choisit UNE AUTRE LIGNE en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue y, on choisit la troisième ligne. On élimine alors l'inconnue y des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_2) par (E_2).
- On remplace (E_3) par (E_3).
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_3)$.

Étape 2

On choisit UNE AUTRE LIGNE en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue y, on choisit la troisième ligne. On élimine alors l'inconnue y des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_2) par (E_2).
- On remplace (E_3) par (E_3).
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_3)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrcl} x & & & + & z & & & = & 2 \\ & & & - & 2z & - & 2t & = & 2 \\ & - & 2y & & & - & 2t & = & 4 \\ & & & - & 2z & + & 2t & = & 4 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} (E_1) + \frac{1}{2}(E_3) \\ (E_2) \\ (E_3) \\ (E_4) - (E_3) \end{array}$$

Étape 3

On choisit UNE AUTRE LIGNE (différente de (E_1) et de (E_3)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue z, on choisit la deuxième ligne. On élimine alors l'inconnue z des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_2) par (E_2).
- On remplace (E_3) par (E_3).
- On remplace (E_4) par $(E_4) - (E_2)$.

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl} x & & & & & - & t & = & 3 & \quad (E_1) + \frac{1}{2}(E_2) \\ & & & - & 2z & - & 2t & = & 2 & \quad (E_2) \\ & - & 2y & & & - & 2t & = & 4 & \quad (E_3) \\ & & & & & + & 4t & = & 2 & \quad (E_4) - (E_2) \end{array}\right.$$

Étape 4

On choisit UNE AUTRE LIGNE (différente de (E_1), de (E_3) et de (E_2)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue t, on choisit la quatrième ligne. On élimine alors l'inconnue t des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{4}(E_4)$.
- On remplace (E_2) par $(E_2) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_4) par (E_4).

Étape 4

On choisit UNE AUTRE LIGNE (différente de (E_1), de (E_3) et de (E_2)) en guise de pivot. Pour éliminer l'inconnue t, on choisit la quatrième ligne. On élimine alors l'inconnue t des autres équations de la façon suivante :

- On remplace (E_1) par $(E_1) + \frac{1}{4}(E_4)$.
- On remplace (E_2) par $(E_2) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_3) par $(E_3) + \frac{1}{2}(E_4)$.
- On remplace (E_4) par (E_4).

Le nouveau système d'équations est alors

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrl} x & & & & & & = & \frac{7}{2} & \quad (E_1) + \frac{1}{4}(E_4) \\ & & & - & 2z & & = & 3 & \quad (E_2) + \frac{1}{2}(E_4) \\ & - & 2y & & & & = & 5 & \quad (E_3) + \frac{1}{2}(E_4) \\ & & & & & + \; 4t & = & 2 & \quad (E_4) \end{array}\right.$$

Étape 5

On divise les quatre équations de sorte à ce que le coefficient devant l'inconnue soit 1. Et, l'on réordonne. En d'autres termes :

- On remplace (E_1) par (E_1).
- On remplace (E_2) par $-\frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_3) par $-\frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_4) par $\frac{1}{4}(E_4)$.

Étape 5

On divise les quatre équations de sorte à ce que le coefficient devant l'inconnue soit 1. Et, l'on réordonne. En d'autres termes :

- On remplace (E_1) par (E_1).
- On remplace (E_2) par $-\frac{1}{2}(E_3)$.
- On remplace (E_3) par $-\frac{1}{2}(E_2)$.
- On remplace (E_4) par $\frac{1}{4}(E_4)$.

Le système d'équations est alors résolu :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & & & & = & \frac{7}{2} & (E_1) \\ & y & & & = & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}(E_3) \\ & & z & & = & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}(E_2) \\ & & & t & = & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(E_4) \end{array}\right.$$

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Vitesse de l'algorithme

Mais la méthode la plus rapide (dans le cas général) qui existe est la méthode du pivot de Gauss.

Quelques remarques

Autres méthodes

Il y a d'autres méthodes pour résoudre les systèmes d'équations linéaires : la méthode de Cramer utilisant le déterminant, l'inversion des matrices, la méthode de substitution.

Vitesse de l'algorithme

Mais la méthode la plus rapide (dans le cas général) qui existe est la méthode du pivot de Gauss.

Systèmes à n équations à p inconnues

On procède de la même manière lorsque l'on a un système de n équations à p inconnues.

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & (L_1) \\
1 & 1 & -1 & -1 & 2 & & (L_2) \\
1 & -1 & 1 & -1 & 4 & & (L_3) \\
1 & -1 & -1 & 1 & 8 & & (L_4)
\end{array}$$

Notation matricielle

Pour accélérer encore la méthode, on ne note pas les inconnues. Le système initial s'écrit comme suit :

$$\begin{array}{cccc|cl} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & (L_1) \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & (L_2) \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 & (L_3) \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 8 & (L_4) \end{array}$$

On encadre le pivot que l'on choisit puis l'on applique les opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{cccc|cl} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & (L_1) \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2)-(L_1) \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 & (L_3)-(L_1) \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 8 & (L_4)-(L_1) \end{array}$$

Notation matricielle 2

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cl}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & (L_1)+\frac{1}{2}(L_3) \\
0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\
0 & 0 & -2 & 2 & 4 & (L_4)-(L_3)
\end{array}$$

On conserve l'encadrement du pivot (pour se souvenir de ne plus utiliser la ligne (L_1)). On procède de même que tout à l'heure :

$$\begin{array}{cccc|cl}
\boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 2 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_3) \\
0 & 0 & -2 & -2 & 2 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\
0 & 0 & -2 & 2 & 4 & (L_4) - (L_3)
\end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|cl}
\boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 3 & (L_1) + \frac{1}{2}(L_2) \\
0 & 0 & \boxed{-2} & -2 & 2 & (L_2) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & -2 & 4 & (L_3) \\
0 & 0 & 0 & 4 & 2 & (L_4) - (L_2)
\end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|c l}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1) + \frac{1}{4}(L_4) \\
0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & (L_2) + \frac{1}{2}(L_4) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 5 & (L_3) + \frac{1}{2}(L_4) \\
0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & (L_4)
\end{array}$$

Puis :

$$\begin{array}{cccc|c l}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & (L_1)+\frac{1}{4}(L_4) \\
0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & 3 & (L_2)+\frac{1}{2}(L_4) \\
0 & \boxed{-2} & 0 & 0 & 5 & (L_3)+\frac{1}{2}(L_4) \\
0 & 0 & 0 & \boxed{4} & 2 & (L_4)
\end{array}$$

Déterminant

A ce moment de l'algorithme, la valeur absolue du produit des pivots est égale à la valeur absolue du déterminant de la matrice initiale.

Notation matricielle 4

Et enfin :

$$\begin{array}{cccc|c}
\boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\
0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\
0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} \\
0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
(L_1) \\
-\frac{1}{2}(L_3) \\
-\frac{1}{2}(L_2) \\
\frac{1}{4}(L_4)
\end{array}$$

Notation matricielle 4

Et enfin :

$$\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} (L_1) \\ -\frac{1}{2}(L_3) \\ -\frac{1}{2}(L_2) \\ \frac{1}{4}(L_4) \end{array}$$

Remarque

Si l'on avait mis la matrice identité à droite au début de l'algorithme, on aurait trouvé l'inverse de la matrice initiale à droite du trait vertical.

Quelques règles à savoir

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.
- Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

Quelques règles à savoir

- Les pivots sont choisis dans la partie à gauche du trait vertical.
- On ne peut pas choisir un pivot dans une ligne ou une colonne où il y a déjà un pivot.
- Un pivot doit correspondre à un élément non nul du tableau.

La réduction du tableau des coefficients est terminée lorsqu'on ne peut plus choisir de nouveau pivot en respectant les règles ci-dessus.

Plan

Définition

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

1. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$.

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

1. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $(\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$.

Définition

$(\mathbb{E},+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E},+)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

1. $\forall x,y \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on a : $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$.
3. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(\beta.x) = (\alpha \times \beta).x$.

Définition

$(\mathbb{E},+,.)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E},+)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

1. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$.
3. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(\beta.x) = (\alpha \times \beta).x$.
4. $\forall x \in \mathbb{E}$, on a : $1.x = x$.

Définition

$(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel) si l'ensemble $\mathbb{E}$ est muni d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe telles que :

Groupe abélien

$(\mathbb{E}, +)$ est un groupe abélien (commutatif).

Loi de composition externe

1. $\forall x, y \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$.
2. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $(\alpha+\beta).x = \alpha.x + \beta.x$.
3. $\forall x \in \mathbb{E}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a : $\alpha.(\beta.x) = (\alpha \times \beta).x$.
4. $\forall x \in \mathbb{E}$, on a : $1.x = x$.

ATTENTION

La loi $+$ dans $\mathbb{E}$ n'est pas la même que la loi $+$ dans $\mathbb{R}$.

Notations

Espace vectoriel

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $\mathbb{E}$ pour désigner l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, .)$.

Notations

Espace vectoriel

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $\mathbb{E}$ pour désigner l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, .)$.

Vecteurs

Un élément d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est appelé un vecteur.

Notations

Espace vectoriel

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on écrit $\mathbb{E}$ pour désigner l'espace vectoriel $(\mathbb{E}, +, .)$.

Vecteurs

Un élément d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ est appelé un vecteur.

Loi de composition externe

Soient $x \in \mathbb{E}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $\alpha x := \alpha . x$.

Exemples

Exemples

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemples

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{R}^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Exemples

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{R}^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble des polynômes réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{R}_n[X]$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemples

$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{R}^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$

L'ensemble des polynômes réels est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, $\mathbb{R}_n[X]$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

$\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

$\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En pratique

Pour montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, il suffit de prouver

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

$\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En pratique

Pour montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, il suffit de prouver

- $\mathbb{F} \neq \emptyset$.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

$\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En pratique

Pour montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, il suffit de prouver

- $\mathbb{F} \neq \emptyset$.
- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.

Sous-espace vectoriel

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Définition

$\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ si

- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En pratique

Pour montrer que $\mathbb{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$, il suffit de prouver

- $\mathbb{F} \neq \emptyset$.
- $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$.
- $\mathbb{F}$ est stable pour l'addition et pour la multiplication externe : $\forall x, y \in \mathbb{F}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a $\alpha . x + y \in \mathbb{F}$.

Exemples

Exemples

Fonctions nulles aux bords

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fonctions f de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

Exemples

Fonctions nulles aux bords

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fonctions f de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'ensemble des complexes z tels que $z + i\overline{z} = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

Exemples

Fonctions nulles aux bords

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{F}_0$ l'ensemble des fonctions f de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f(1) = 0$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$.

$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'ensemble des complexes z tels que $z + i\bar{z} = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$.

Matrices de trace nulle

L'ensemble des matrices carrées réelles de taille n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
L'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et de traces nulles est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Combinaison linéaire

Soit une famille de vecteurs $\{e_1\ ;\ e_2\ ;\ \cdots\ ;\ e_n\} \subset \mathbb{E}$.

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Combinaison linéaire

Soit une famille de vecteurs $\{e_1\,;\, e_2\,;\,\cdots\,;\, e_n\} \subset \mathbb{E}$.
On dit que y est une combinaison linéaire de $\{e_1\,;\, e_2\,;\,\cdots\,;\, e_n\}$ s'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\,.$$

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Combinaison linéaire

Soit une famille de vecteurs $\{e_1\,;\,e_2\,;\,\cdots\,;\,e_n\} \subset \mathbb{E}$.
On dit que y est une combinaison linéaire de $\{e_1\,;\,e_2\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$ s'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\,.$$

Définition

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $\{e_1\,;\,e_2\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Ce sous-espace vectoriel est noté $\mathrm{Vect}\,(e_1;\cdots;e_n)$.

Espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Combinaison linéaire

Soit une famille de vecteurs $\{e_1\,;\, e_2\,;\, \cdots\,;\, e_n\} \subset \mathbb{E}$.
On dit que y est une combinaison linéaire de $\{e_1\,;\, e_2\,;\, \cdots\,;\, e_n\}$ s'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$y = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n\,.$$

Définition

L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de la famille $\{e_1\,;\, e_2\,;\, \cdots\,;\, e_n\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Ce sous-espace vectoriel est noté $\mathrm{Vect}\,(e_1; \cdots; e_n)$.

Exemple

$\mathrm{Vect}(i)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

Définition

On dit que la famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\} \subset \mathbb{E}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ si

$$\mathrm{Vect}\,(e_1;\cdots;e_n) = \mathbb{E}\,.$$

En d'autres termes, tous les vecteurs de $\mathbb{E}$ sont des combinaisons linéaires de la famille $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$.

Famille génératrice

Définition

On dit que la famille de vecteurs $\{e_1 ; \cdots ; e_n\} \subset \mathbb{E}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ si

$$\mathrm{Vect}\,(e_1; \cdots; e_n) = \mathbb{E}\,.$$

En d'autres termes, tous les vecteurs de $\mathbb{E}$ sont des combinaisons linéaires de la famille $\{e_1 ; \cdots ; e_n\}$.

Exemple

La famille $\left\{1; \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{2}\right\}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z = a + bi = a.1 + b.\frac{1+i}{2} + (-b).\frac{1-i}{2}\,.$$

Famille génératrice

Définition

On dit que la famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\} \subset \mathbb{E}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ si

$$\mathrm{Vect}\,(e_1;\cdots;e_n) = \mathbb{E}\,.$$

En d'autres termes, tous les vecteurs de $\mathbb{E}$ sont des combinaisons linéaires de la famille $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$.

Exemple

La famille $\left\{1; \frac{1-i}{2}; \frac{1+i}{2}\right\}$ est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Soit $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z = a + bi = a.1 + b.\frac{1+i}{2} + (-b).\frac{1-i}{2}\,.$$

Mais les coefficients ne sont pas uniques car l'on a aussi
$z = (a-b).1 + 0.\frac{1-i}{2} + (2b).\frac{1+i}{2} = 0.1 + (a-b).\frac{1-i}{2} + (a+b).\frac{1+i}{2}$.

Famille libre

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_n\} \subset \mathbb{E}$ est libre si l'on a :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \,, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \quad \text{implique } \alpha_k = 0 \;\; \forall 1 \leq k \leq n \,.$$

Famille libre

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\} \subset \mathbb{E}$ est libre si l'on a :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ , \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \quad \text{implique } \alpha_k = 0 \ \ \forall 1 \leq k \leq n\,.$$

Lorsqu'une famille de vecteurs n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Famille libre

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1 ; \cdots ; e_n\} \subset \mathbb{E}$ est libre si l'on a :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \quad \text{implique } \alpha_k = 0 \ \ \forall 1 \leq k \leq n\,.$$

Lorsqu'une famille de vecteurs n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Unicité des coefficients

Tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_n)$ s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire de la famille $\{e_1 ; \cdots ; e_n\}$.

Famille libre

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\} \subset \mathbb{E}$ est libre si l'on a :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\ , \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = 0 \quad \text{implique } \alpha_k = 0\ \ \forall 1 \leq k \leq n\,.$$

Lorsqu'une famille de vecteurs n'est pas libre, on dit qu'elle est liée.

Unicité des coefficients

Tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(e_1, \cdots, e_n)$ s'écrit d'une unique façon comme combinaison linéaire de la famille $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$.

Exemple

La famille $\{1; X; X^3\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

Base

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$ est une base de $\mathbb{E}$ si c'est une famille libre et génératrice :

$$\forall y \in \mathbb{E}, \exists! \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \,.$$

Base

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1\,;\,\cdots\,;\,e_n\}$ est une base de $\mathbb{E}$ si c'est une famille libre et génératrice :

$$\forall y \in \mathbb{E}, \exists! \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\,.$$

Exemples

$\{1; i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.

$\left\{X^k\,;\,k \geq 0\right\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}$.

Base

Définition

La famille de vecteurs $\{e_1 \, ; \, \cdots \, ; \, e_n\}$ est une base de $\mathbb{E}$ si c'est une famille libre et génératrice :

$$\forall y \in \mathbb{E}, \exists ! \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \quad \text{tels que} \quad y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \, .$$

Exemples

$\{1; i\}$ est une base de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$.
$\left\{X^k \, ; \, k \geq 0\right\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$ sur $\mathbb{R}$.

Existence d'une base

Tout espace vectoriel admet une base (en admettant l'axiome du choix).

Dimension

Théorème

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Et, soient $\{e_1 ; \cdots ; e_n\}$ et $\{f_1 ; \cdots ; f_m\}$ deux bases de $\mathbb{E}$. Alors : $m = n$.
En d'autres termes, toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal.

Théorème

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Et, soient $\{e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_n\}$ et $\{f_1 \,;\, \cdots \,;\, f_m\}$ deux bases de $\mathbb{E}$. Alors : $m = n$.
En d'autres termes, toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal.

Définition

Le cardinal d'une base d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$ est appelée la dimension de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$. On la note $\dim \mathbb{E}$.

Théorème

Soit $\mathbb{E}$ un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Et, soient $\{e_1 ; \cdots ; e_n\}$ et $\{f_1 ; \cdots ; f_m\}$ deux bases de $\mathbb{E}$. Alors : $m = n$.
En d'autres termes, toutes les bases d'un espace vectoriel ont même cardinal.

Définition

Le cardinal d'une base d'un espace vectoriel $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$ est appelée la dimension de $\mathbb{E}$ sur $\mathbb{R}$. On la note $\dim \mathbb{E}$.

Exemples

dim $\mathbb{R}^n = n$. dim $\mathbb{C} = 2$. dim $\mathbb{R}_n[X] = n + 1$.
La dimension de $\mathcal{F}([0;1];\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ est infinie.

Rang

Définition

Le rang d'une famille de vecteurs $\{e_1 \,;\, \cdots \,;\, e_n\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Rang

Définition

Le rang d'une famille de vecteurs $\{e_1 ; \cdots ; e_n\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Théorème

Soit $\mathbb{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$. Alors : $\dim \mathbb{F} \leq \dim \mathbb{E}$. Et, si $\dim \mathbb{F} = \dim \mathbb{E}$, alors $\mathbb{F} = \mathbb{E}$.

Somme

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. On définit

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} := \{f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\} .$$

Somme

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. On définit

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} := \{f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\} .$$

Alors, $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un espace vectoriel.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ - 1

Somme

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. On définit

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} := \{f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\} .$$

Alors, $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un espace vectoriel.

Intersection

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. Alors $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ - 1

Somme

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. On définit

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} := \{ f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G} \} .$$

Alors, $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un espace vectoriel.

Intersection

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. Alors $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels n'est JAMAIS vide puisque le vecteur nul lui appartient toujours.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ - 1

Somme

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. On définit

$$\mathbb{F} + \mathbb{G} := \{f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\} .$$

Alors, $\mathbb{F} + \mathbb{G}$ est un espace vectoriel.

Intersection

Soient deux sous-espaces vectoriels $\mathbb{F}$ et $\mathbb{G}$. Alors $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$.

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels n'est JAMAIS vide puisque le vecteur nul lui appartient toujours.

Somme directe

Si, $\mathbb{F} \bigcap \mathbb{G} = \{0\}$, on note $\mathbb{F} \bigoplus \mathbb{G} := \{f + g \mid f \in \mathbb{F}, g \in \mathbb{G}\}$.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ - 2

Dimension de la somme

$\dim\ (\mathbb{F}+\mathbb{G}) = \dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{F} \bigcap \mathbb{G}.$
$\dim\ (\mathbb{F} \bigoplus \mathbb{G}) = \dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{G}.$

Opérations sur les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{E}$ - 2

Dimension de la somme

$\dim\,(\mathbb{F}+\mathbb{G}) = \dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{G} - \dim \mathbb{F} \bigcap \mathbb{G}$.
$\dim\,(\mathbb{F} \bigoplus \mathbb{G}) = \dim \mathbb{F} + \dim \mathbb{G}$.

Exemple

Sur $\mathbb{E} := \mathbb{R}^4$, on considère $\mathbb{F} := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ et $\mathbb{G} := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} ; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. On a : $\dim \mathbb{F} = 2$, $\dim \mathbb{G} = 2$, $\dim \mathbb{F} \bigcap \mathbb{G} = 1$ et $\dim\,(\mathbb{F}+\mathbb{G}) = 3$.