Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 2 : Les nombres complexes

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

1. Introduction
   - Définition de $\mathbb{C}$
   - Deux systèmes de coordonnées
2. Calculs
3. Module et Argument
4. Équations algébriques

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0\,.$$

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0\,.$$

Résolution

Admettons l'existence d'une solution, $\sqrt{-1}$. (écriture à proscrire !).

Notons i cette solution.

Une impossible équation

$$X^2 + 1 = 0\,.$$

Résolution

Admettons l'existence d'une solution, $\sqrt{-1}$. (écriture à <u>proscrire</u> !).
Notons i cette solution.

Remarque

Elle est parfois notée j, notamment en électronique ou en traitement du signal.

Définition

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est définit comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi \; ; \; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \; .$$

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est définit comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi \; ; \; a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \; .$$

Notation

Un nombre complexe est généralement noté z.

Définition

Nombre complexe

L'ensemble des nombres complexes est définit comme suit :

$$\mathbb{C} := \{a + bi \ ; \ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\} \ .$$

Notation

Un nombre complexe est généralement noté z.

Axiomatique

On peut définir rigoureusement l'ensemble $\mathbb{C}$, en passant par $\mathbb{R}^2$ (muni d'une multiplication ad hoc), en utilisant un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des matrices 2×2 ou en utilisant les extensions de corps...

Coordonnées cartésiennes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Coordonnées cartésiennes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z. On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \mathrm{Re}(z)$.

Coordonnées cartésiennes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z. On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \mathrm{Re}(z)$.

Partie imaginaire

On dit que b est la partie imaginaire de z. On écrit aussi : $b = \Im(z)$ ou $b = \mathrm{Im}(z)$.

Coordonnées cartésiennes

Soit $z = a + bi$ un nombre complexe avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Partie réelle

On dit que a est la partie réelle de z. On écrit aussi : $a = \Re(z)$ ou $a = \mathrm{Re}(z)$.

Partie imaginaire

On dit que b est la partie imaginaire de z. On écrit aussi : $b = \Im(z)$ ou $b = \mathrm{Im}(z)$.

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$. On le note aussi z^*.

Représentation sur le plan

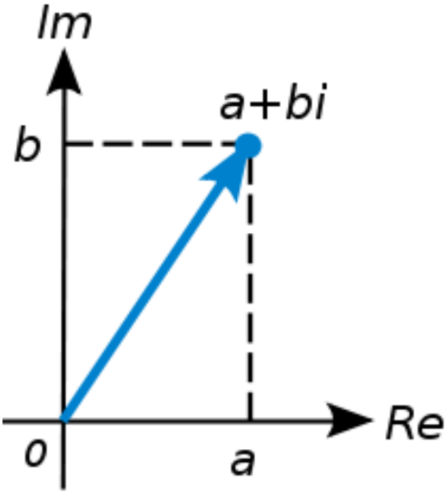

Figure – On représente le complexe $z = a + bi$ sur le plan par un point M d'abscisse $a = \mathrm{Re}(z)$ et d'ordonnée $b = \mathrm{Im}(z)$. Le point ainsi défini est dit d'affixe z.

Module

Le module du complexe z, que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z. Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}\,.$$

Coordonnées polaires

Module

Le module du complexe z, que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z. Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}\,.$$

Argument

Si $z \neq 0$, son argument, que l'on note $\arg(z)$, est l'angle formé par le segment $[OM(z)]$ et l'axe des abscisses. Par convention, $\arg(z) \in]-\pi;\pi]$. Ainsi, $\arg(z)$ est l'unique réel tel que

$$\arg(z) \in]-\pi;\pi]\ ,\ \cos\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\ \text{et}\ \sin\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\,.$$

Coordonnées polaires

Module

Le module du complexe z, que l'on note $|z|$, est la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$ où $M(z)$ est le point d'affixe z. Ainsi :

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}\,.$$

Argument

Si $z \neq 0$, son argument, que l'on note $\arg(z)$, est l'angle formé par le segment $[OM(z)]$ et l'axe des abscisses. Par convention, $\arg(z) \in]-\pi;\pi]$. Ainsi, $\arg(z)$ est l'unique réel tel que

$$\arg(z) \in]-\pi;\pi]\ , \ \cos\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \ \text{et} \ \sin\left(\arg(z)\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}\,.$$

Forme exponentielle

On utilise la notation suivante : $z = |z|e^{i\arg(z)}$.

Représentation sur le plan en coordonnées polaires

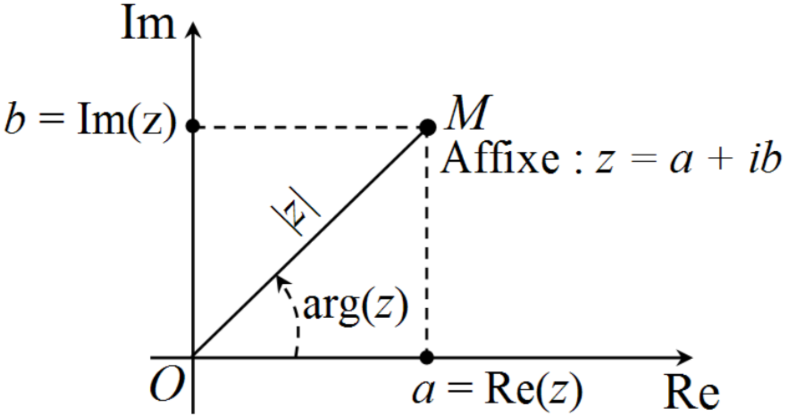

Figure – Les deux types de coordonnées sont équivalentes.

Plan

Opérations élémentaires 1

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Im}(z_1)i) + (\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)i) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + (\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))\, i\,. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 1

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Im}(z_1)i) + (\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)i) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + (\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))\, i\,. \end{aligned}$$

Soustraction

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Im}(z_1)i) - (\mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Im}(z_2)i) \\ &= (\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)) + (\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2))\, i\,. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 2

Multiplication

Soient $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i\,. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 2

Multiplication

Soient $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$.

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 =& (a_1 + b_1 i) \times (a_2 + b_2 i) \\ =& a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ =& (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i\,. \end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Opérations élémentaires 3

Division

Soient $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\ &= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\ &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i\,.\end{aligned}$$

Opérations élémentaires 3

Division

Soient $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$.

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \\
&= \frac{(a_1 + b_1 i) \times (a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i) \times (a_2 - b_2 i)} \\
&= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i\,.
\end{aligned}$$

Quand on a un complexe z au dénominateur, on multiplie par son conjugué $\overline{z} := \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) i$ au numérateur et au dénominateur.

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\bar{z} = a - bi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$. On le note aussi z^*.

Addition

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$. On le note aussi z^*.

Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$$

Conjugué

Le conjugué de $z = a + bi$ est le nombre complexe $\overline{z} = a - bi = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z)i$. On le note aussi z^*.

Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors :

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) + (\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))\, i} \\
&= (\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) - (\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))\, i \\
&= (\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Im}(z_1)i) + (\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_2)i) \\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}\,.
\end{aligned}$$

Soustraction

Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors :

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\,.$$

Soustraction

Soient deux complexes z_1 et z_2. Alors :

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}\,.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 - z_2} =& \overline{(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2)) - (\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2))\, i} \\
=& \left(\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2)\right) - \left(\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2)\right) i \\
=& \left(\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Im}(z_1) i\right) - \left(\mathrm{Re}(z_2) - \mathrm{Im}(z_2) i\right) \\
=& \overline{z_1} - \overline{z_2}\,.
\end{aligned}$$

Multiplication

Soient deux complexes $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$. Alors :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}\,.$$

Multiplication

Soient deux complexes $z_1 := a_1 + b_1 i$ et $z_2 := a_2 + b_2 i$. Alors :

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}\,.$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \times z_2} &= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i} \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i\,.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a_1 - b_1 i) \times (a_2 - b_2 i) \\
&= (a_1 \times a_2 + (-b_1) \times (-b_2)) + (a_1 \times (-b_2) + a_2 \times (-b_1))\, i \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i \\
&= \overline{z_1 \times z_2}\,.
\end{aligned}$$

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z \times \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2$.

Autres formules

Division

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors : $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Partie réelle

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

Partie imaginaire

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$.

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors : $z \times \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = |z|^2$.

Inverse

Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $z \neq 0$. Alors : $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Plan

1. Introduction
2. Calculs
3. Module et Argument
   - Caractérisation du module et de l'argument
   - Propriétés basiques
   - Formules classiques
4. Équations algébriques

Calculs

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Calculs

Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Méthode de calcul pour l'argument

- Si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$.
- Si $\mathrm{Re}(z) < 0$, $\arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi$.
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$, $\arg(z) = \frac{\pi}{2}$.
- Si $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$, $\arg(z) = -\frac{\pi}{2}$

Propriétés basiques sur le module

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.
3. $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.
3. $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.
3. $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $\left|\prod_{k=1}^{p} z_k\right| = \prod_{k=1}^{p} |z_k|$.

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.
3. $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $\left|\prod_{k=1}^{p} z_k\right| = \prod_{k=1}^{p} |z_k|$.

Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Propriétés basiques sur le module

1. Le module $|z|$ correspond à la norme du vecteur $\overrightarrow{OM(z)}$.
2. $|-z| = |z| = |\overline{z}| = \sqrt{z \times \overline{z}}$.
3. $|z^n| = |z|^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si $z \neq 0$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Et, si $z_2 \neq 0$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.
5. $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$. Mieux : $\left|\prod_{k=1}^{p} z_k\right| = \prod_{k=1}^{p} |z_k|$.

Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Et, si $z_1, \cdots, z_p \in \mathbb{C}$, alors :

$$\left|\sum_{k=1}^{p} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{p} |z_k|.$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg\left(z_1 \times z_2\right) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \ \left(2\pi\right).$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg\left(z_1 \times z_2\right) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ (2\pi)\,.$$

Et :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^{p} z_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{p} \arg(z_k)\ (2\pi)\,.$$

Argument d'un produit

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\arg\left(z_1 \times z_2\right) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \ (2\pi)\,.$$

Et :

$$\arg\left(\prod_{k=1}^{p} z_k\right) \equiv \sum_{k=1}^{p} \arg(z_k) \ (2\pi)\,.$$

Rappel

On utilise aussi la notation $\cos(\theta) + i\sin(\theta) =: e^{i\theta}$. Il vient conséquemment : $e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$. En effet, $\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$ et $\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$.

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg\left(z^n\right) \equiv n \times \arg(z) \ (2\pi)\,.$$

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg\left(z^n\right) \equiv n \times \arg(z) \;(2\pi)\,.$$

Argument de l'inverse

Si $z \neq 0$, alors $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Autres formules avec l'argument

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\arg\left(z^n\right) \equiv n \times \arg(z) \ (2\pi)\,.$$

Argument de l'inverse

Si $z \neq 0$, alors $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$.

Argument du conjugué

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$.

Formules classiques

Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,.$$

Formules classiques

Formule de Moivre

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\,.$$

Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

et

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\,.$$

Plan

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

“Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.”

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

"Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos."
Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

"Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos."
Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Exemple

Soient $a_0, \cdots, a_p \in \mathbb{C}$. Alors, l'équation suivante

$$a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

a au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Équations algébriques

Théorème fondamental de l'algèbre

"Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos."
Plus concrètement, toute équation polynômiale (de degré au moins un) dans $\mathbb{C}$ a une solution (au moins).

Exemple

Soient $a_0, \cdots, a_p \in \mathbb{C}$. Alors, l'équation suivante

$$a_p z^p + a_{p-1} z^{p-1} \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

a au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Théorème d'Abel-Ruffini

Mais certaines ne PEUVENT pas être résolues.

Racines énièmes d'un nombre complexe quelconque

Le problème

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = z_0 \,. \tag{I}$$

Racines énièmes d'un nombre complexe quelconque

Le problème

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On cherche $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$z^n = z_0 \,. \tag{I}$$

La solution

On utilise ici la forme exponentielle $z = |z| e^{i \arg(z)}$ et $z_0 = |z_0| e^{i \arg(z_0)}$. L'équation (I) est alors équivalente à

$$|z|^n e^{i \times n \arg(z)} = |z_0| e^{i \arg(z_0)} \,. \tag{II}$$

L'équation (II) donne directement

$$z = |z_0|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg(z_0)}{n}} \times e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,,$$

avec $0 \leq k \leq n-1$. Il y a donc exactement n solutions.

Racines énièmes de l'unité

On cherche à résoudre l'équation (I) avec $z = 1$. On a alors n solutions :

$$\omega_0 = 1\,, \quad \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}\,, \quad \cdots\,, \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,, \quad \omega_{n-1} = e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \left(= \frac{1}{\omega_1} \right).$$

Racines énièmes de l'unité

On cherche à résoudre l'équation (I) avec $z = 1$. On a alors n solutions :

$$\omega_0 = 1\,, \quad \omega_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}\,, \quad \cdots\,, \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}\,, \quad \omega_{n-1} = e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}} \left(= \frac{1}{\omega_1}\right)\,.$$

On peut montrer

$$\omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_{n-1} = 0\,.$$

En effet, on note : $\omega_k = \omega_1^k$ avec $\omega_1 \neq 1$. Donc :

$$\omega_0 + \cdots + \omega_{n-1} = 1 + \omega_1^1 + \cdots + \omega_1^{n-1} = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = 0\,.$$

Équations de degré 2

Tout se passe comme dans $\mathbb{R}$. On se donne l'équation

$$az^2 + bz + c = 0\,,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Et, $a \neq 0$.

Équations de degré 2

Tout se passe comme dans $\mathbb{R}$. On se donne l'équation

$$az^2 + bz + c = 0\,,$$

où $a, b, c \in \mathbb{C}$. Et, $a \neq 0$.

Résolution

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}\,.$$

L'équation est donc équivalente à

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Soit $\delta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\delta_0^2 = b^2 - 4ac$. L'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - \delta_0}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \delta_0}{2a}\,.$$

Racine carrée d'un complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$z := \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\, i$$

est tel que $z^2 = a + bi$.

Racine carrée d'un complexe

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors,

$$z := \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\, i$$

est tel que $z^2 = a + bi$.

Preuve

On résout $(x+iy)^2 = a + bi$. Par identification :

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b\,.$$

Par ailleurs, $|(x+iy)|^2 = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi, on a :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\,, \quad x^2 - y^2 = a \quad \text{et} \quad 2xy = b\,.$$

Or, $x^2 = \frac{x^2+y^2}{2} + \frac{x^2-y^2}{2}$ et $y^2 = \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{x^2-y^2}{2}$.