Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre bonus 1 : Trigonométrie

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Fonction périodique

Une fonction f sur $\mathbb{R}$ est $T-$périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

Fonction périodique

Une fonction f sur $\mathbb{R}$ est $T-$périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit aussi que f est périodique de période T.

Fonction périodique

Une fonction f sur $\mathbb{R}$ est $T-$périodique si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$

On dit aussi que f est périodique de période T.

Exemples

La fonction cosinus est 2π-périodique.

Fonction bijective

Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de I vers un ensemble E.
La fonction f est dite bijective de I dans E si et seulement si

- f est surjective : $\forall y \in E, \quad \exists x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est injective : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Fonction bijective

Soit un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction de I vers un ensemble E.
La fonction f est dite bijective de I dans E si et seulement si

- f est surjective : $\forall y \in E, \quad \exists x \in I$ tel que $f(x) = y$.
- f est injective : $\forall x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_2$ implique $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Plan

Cercle trigonométrique

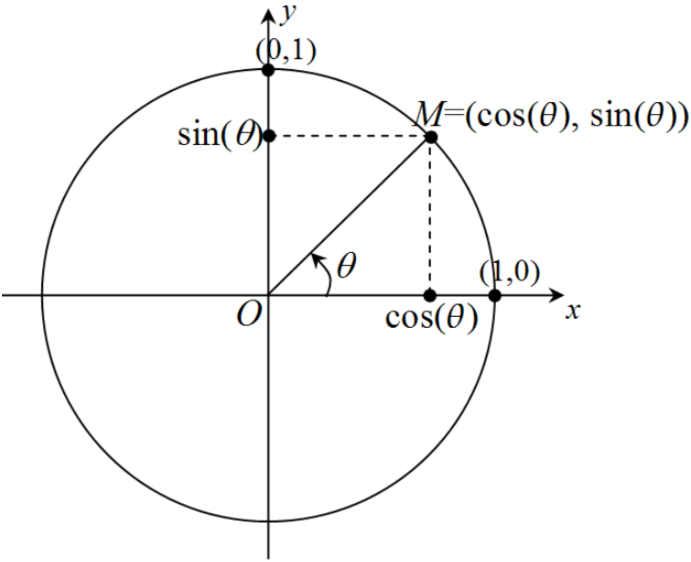

FIGURE – Cercle de centre O et de rayon 1

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ. 360 degrés valent 2π radians.

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ. 360 degrés valent 2π radians.
On note $M(\theta)$ le point d'intersection entre le cercle trigonométrique et la demi-droite issue de O et d'angle θ avec l'axe des abscisses.

Quelques définitions

Radians

Un angle de θ radians intercepte sur le cercle unité un arc de longueur θ. 360 degrés valent 2π radians.
On note $M(\theta)$ le point d'intersection entre le cercle trigonométrique et la demi-droite issue de O et d'angle θ avec l'axe des abscisses.

Cosinus et sinus.

Le **cosinus** de l'angle θ correspond à l'**abscisse** du point $M(\theta)$.
Le **sinus** de l'angle θ correspond à l'**ordonnée** du point $M(\theta)$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\overrightarrow{u_0} + \sin(\theta)\overrightarrow{v_0} =: \overrightarrow{u_\theta}$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\overrightarrow{u_0} + \sin(\theta)\overrightarrow{v_0} =: \overrightarrow{u_\theta}$.

Égalité importante

Théorème de Pythagore : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Quelques définitions 2

Les coordonnées du point $M(\theta)$

On a : $M(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = \cos(\theta)\overrightarrow{u_0} + \sin(\theta)\overrightarrow{v_0} =: \overrightarrow{u_\theta}$.

Égalité importante

Théorème de Pythagore : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$.

Tangente

La tangente de l'angle θ est le rapport du sinus sur le cosinus :

$$\tan(\theta) := \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \quad \text{si} \quad \cos(\theta) \neq 0\,.$$

Plan

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1;1]$.
- La fonction sinus est 2π-périodique.

Fonctions sin et arcsin

- La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1;1]$.
- La fonction sinus est 2π-périodique.

Bijection

La fonction sinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1;1]$.
Mais, elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$.
On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\begin{aligned}\arcsin :\quad [-1;1] &\to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\\ x &\mapsto \arcsin(x)\,.\end{aligned}$$

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Formules entre sinus et arcsinus

Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$ pour tout $x \in [-1;1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arcsin(\sin(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arcsin(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\sin(\arcsin(x)) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + 4\pi$, $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Remarque : $\arcsin(\sin(x)) = x + 2k\pi$, où k dépend de x.

Représentations graphiques

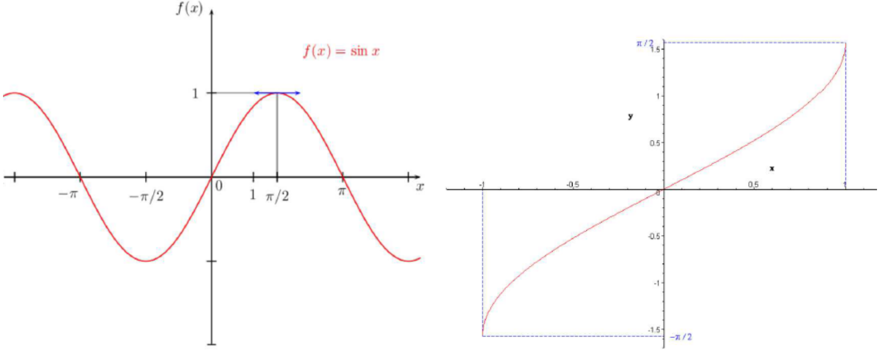

FIGURE – Graphes des fonctions sinus (à gauche) et arcsinus (à droite).

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1;1]$.
- La fonction cosinus est 2π-périodique.

Fonctions cos et arccos

- La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$.
- La fonction cosinus est 2π-périodique.

Bijection

La fonction cosinus n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ dans $[-1; 1]$. Mais, elle réalise une bijection de $[0; \pi]$ dans $[-1; 1]$.
On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\text{arccos} : \begin{array}{rcl} [-1; 1] & \to & [0; \pi] \\ x & \mapsto & \text{arccos}(x) \end{array}.$$

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1; 1]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos(\cos(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in [0; \pi]$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos\left(\arccos(x)\right) = x$ pour tout $x \in \left[-1;1\right]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos\left(\cos(x)\right) = x$ n'est vrai que si $x \in [0;\pi]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$. Et, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
$\arccos\left(\cos(x)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq x$.

Formules entre cosinus et arccosinus

Par définition, $\cos\left(\arccos(x)\right) = x$ pour tout $x \in \left[-1;1\right]$.

Toutefois, la formule réciproque $\arccos\left(\cos(x)\right) = x$ n'est vrai que si $x \in [0;\pi]$.

Exemples

Si $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos(x) = \frac{\pi}{6}$. Et, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{6} + 4\pi$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Et,
$\arccos\left(\cos(x)\right) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \neq x$.

Remarque : $\arccos\left(\cos(x)\right) = x + 2k\pi$, où k dépend de x.

Représentations graphiques

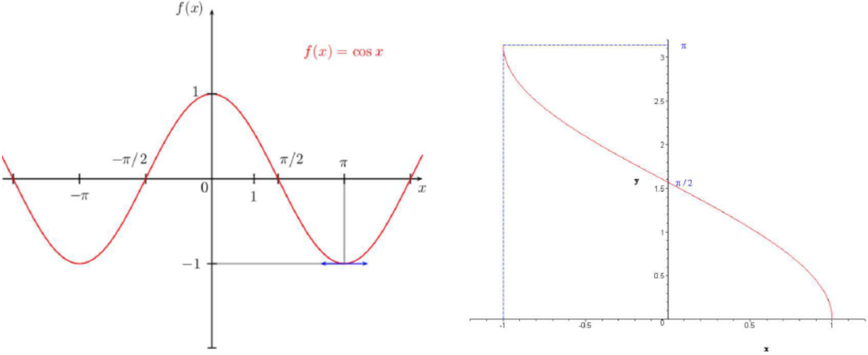

FIGURE – Graphes des fonctions cosinus (à gauche) et arccosinus (à droite).

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.
- La fonction tangente est π-périodique.

Fonctions tan et arctan

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Elle est à valeurs dans l'intervalle ouvert $]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R}$.
- La fonction tangente est π-périodique.

Bijection

La fonction tangente n'est pas bijective de $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ dans $\mathbb{R}$. Mais, elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.
On peut alors définir sa fonction réciproque,

$$\begin{aligned} \text{arctan}: \quad \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan(x)\,. \end{aligned}$$

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Exemples

Si $x = \sqrt{3}$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + \pi$, $\tan(x) = \sqrt{3}$. Et,
$\arctan(\tan(x)) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Formules entre tangente et arctangente

Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Toutefois, la formule réciproque $\arctan(\tan(x)) = x$ n'est vrai que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Exemples

Si $x = \sqrt{3}$, $\arctan(x) = \frac{\pi}{3}$. Et, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = x$.
Mais, si $x = \frac{\pi}{3} + \pi$, $\tan(x) = \sqrt{3}$. Et,
$\arctan(\tan(x)) = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Remarque : $\arctan(\tan(x)) = x + k\pi$, où k dépend de x.

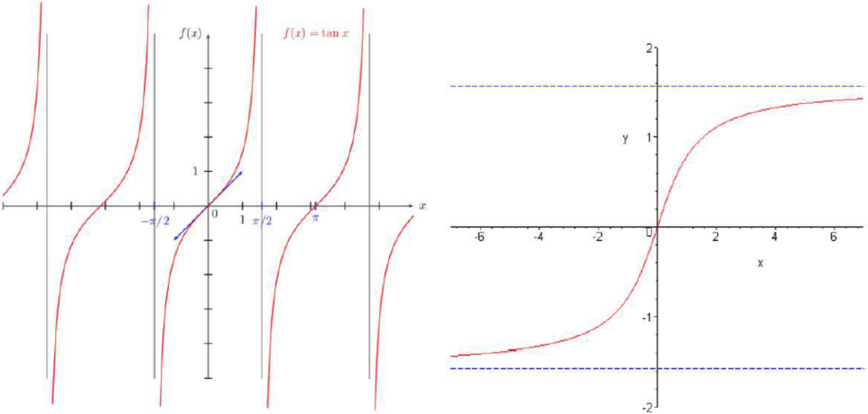

FIGURE – Graphes des fonctions tangente (à gauche) et arctangente (à droite).

Plan

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Liens entre sinus et cosinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)\,.$$

Formules de bases 1

Parité et imparité

La fonction cosinus est paire : $\cos(-x) = \cos(x)$.
Les fonctions sinus et tangente sont impaires : $\sin(-x) = -\sin(x)$ et $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Liens entre sinus et cosinus

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)\,.$$

On en déduit par ailleurs : $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{\tan(x)}$.

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x)\,.$$

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x)\,.$$

On en déduit par ailleurs :

$$\tan\left(\pi - x\right) = -\tan(x)\,.$$

Formules de bases 2

Symétrie par rapport à la droite $\left(x = \frac{\pi}{2}\right)$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x)\,.$$

On en déduit par ailleurs :

$$\tan\left(\pi - x\right) = -\tan(x)\,.$$

Autres formules

$\tan(\pi + x) = \tan(x)$, $\sin(n\pi + x) = (-1)^n \sin(x)$,
$\cos(n\pi + x) = (-1)^n \cos(x)$ et $\tan(n\pi + x) = \tan(x)$.

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y, on a :

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,.\end{aligned}$$

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y, on a :

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,. \end{aligned}$$

Autres formules

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$,
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$,
$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$, $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$.

Formules d'addition

Formules principales

Pour tous les réels x et y, on a :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)\,.$$

Autres formules

$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$,
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x)$,
$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$, $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$.

Ces formules se déduisent des deux précédentes.

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \; = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \ = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Duplication du sinus

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)\,.$$

Formules de duplication

Duplication du cosinus

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

(en nous servant de la relation $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.)

Duplication du sinus

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Duplication de la tangente

$$\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)}.$$

Formules de linéarisation

Linéarisation de $\cos^2$ et de $\sin^2$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}\,.$$

Formules de linéarisation

Linéarisation de $\cos^2$ et de $\sin^2$

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\cos(x)\cos(y) &= \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}, \\
\sin(x)\sin(y) &= \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}, \\
\sin(x)\cos(y) &= \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2} \\
\text{et} \quad \tan^2(x) &= \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}.
\end{aligned}$$

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \; ,$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \; ,$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \; ,$$

Formules de factorisation

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ,$$

$$\cos(x)-\cos(y)=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ,$$

$$\sin(x)+\sin(y)=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\ ,$$

Astuce : $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ et $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$.

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

Astuce : $x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}$ et $y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$.

Formules de factorisation

$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$
$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x)\cos(y)}, \quad \tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos(x)\cos(y)}.$$

Astuce : $x = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{x-y}{2}$ et $y = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{x-y}{2}$.

Plan

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sinus					
Cosinus					
Tangente					

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sinus	0				1
Cosinus	1				0
Tangente	0				$+\infty$

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sinus	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
Cosinus	1		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		0
Tangente	0		1		$+\infty$

Tableau des angles remarquables

Angles (radians)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Angles (degrés)	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$