

# Bases Indispensables des Mathématiques

## Chapitre 2 : Bases des Probabilités (Partie 2).

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

- 1 Définition
- 2 Propriétés
- 3 Espace fondamental dénombrable
- 4 Espace fondamental non dénombrable
- 5 Équiprobabilité

- 1 Définition
- 2 Propriétés
- 3 Espace fondamental dénombrable
- 4 Espace fondamental non dénombrable
- 5 Équiprobabilité

## Approche par les fréquences

On commence d'abord par donner une vision intuitive de la notion de probabilité. Si l'on réalise une suite de jets d'un dé à six faces bien équilibré, on peut constater que la fréquence d'obtention de chaque face s'approche de  $\frac{1}{6}$ . Il s'agit d'une définition objective basée sur l'expérience.

## Approche par les fréquences

On commence d'abord par donner une vision intuitive de la notion de probabilité. Si l'on réalise une suite de jets d'un dé à six faces bien équilibré, on peut constater que la fréquence d'obtention de chaque face s'approche de  $\frac{1}{6}$ . Il s'agit d'une définition objective basée sur l'expérience.

On peut aussi opter pour un point de vue plus subjectif : en raison de la symétrie du dé, on a une chance sur six d'obtenir chaque face.

Définition

Propriétés

Espace fondamental dénombrable

Espace fondamental non dénombrable

Équiprobabilité

# Observations

## Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,

## Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,
- la fréquence de réalisation de l'évènement certain est égale à 1,



## Observations

- la fréquence de réalisation est un nombre compris entre 0 et 1,
- la fréquence de réalisation de l'évènement certain est égale à 1,
- la fréquence de réalisation de  $A \cup B$  est la somme des fréquences de réalisation de  $A$  et de  $B$  lorsque  $A$  et  $B$  sont incompatibles. Cette propriété peut être étendue au cas d'une suite finie ou infinie d'évènements deux à deux incompatibles.

## Définition

Une probabilité est une application  $\mathbb{P}$  qui, à tout évènement  $A$  associé à  $e$  (c'est-à-dire à tout sous-ensemble de  $\Omega$ ), fait correspondre un nombre noté  $\mathbb{P}(A)$  (que l'on appelle "probabilité de  $A$ ") et qui vérifie les trois axiomes suivants :

$$(A_1) \quad 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

$$(A_2) \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

(A<sub>3</sub>) Pour toute famille  $(A_k)_{k \in \mathcal{I}}$  d'évènements deux à deux incompatibles où  $\mathcal{I}$  est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathcal{I}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathcal{I}} \mathbb{P}(A_k).$$

## Remarques

### Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

## Remarques

### Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

### Remarque

La probabilité  $\mathbb{P}$  n'est pas une application de  $\Omega$  dans  $[0; 1]$ . Si  $\Omega$  est fini ou infini dénombrable, nous verrons que la donnée de  $\mathbb{P}$  sur les singletons inclus dans  $\Omega$  suffit à caractériser  $\mathbb{P}$ . De fait, vous avez peut-être l'habitude de raisonner avec  $\mathbb{P}$  comme application de l'univers dans  $[0; 1]$ .

## Remarques

### Remarque

La troisième hypothèse porte aussi le nom d'axiome des probabilités totales.

### Remarque

La probabilité  $\mathbb{P}$  n'est pas une application de  $\Omega$  dans  $[0; 1]$ . Si  $\Omega$  est fini ou infini dénombrable, nous verrons que la donnée de  $\mathbb{P}$  sur les singletons inclus dans  $\Omega$  suffit à caractériser  $\mathbb{P}$ . De fait, vous avez peut-être l'habitude de raisonner avec  $\mathbb{P}$  comme application de l'univers dans  $[0; 1]$ . **C'est une mauvaise habitude qu'il faudra perdre aussi vite que possible.**

- 1 Définition
- 2 Propriétés**
- 3 Espace fondamental dénombrable
- 4 Espace fondamental non dénombrable
- 5 Équiprobabilité

## Probabilité de l'évènement contraire - 1

Soit un évènement  $A$  de probabilité  $\mathbb{P}(A)$ . Par définition du complémentaire,  $A$  et  $A^c$  sont incompatibles. Or, d'après l'axiome  $(A_2)$ , on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega).$$

On a aussi  $\Omega = A \cup A^c$ . Ainsi, il vient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c),$$

d'après l'axiome des probabilités totales, vu que  $A$  et  $A^c$  sont incompatibles. Conséquemment, on a le résultat suivant

## Probabilité de l'évènement contraire - 1

Soit un évènement  $A$  de probabilité  $\mathbb{P}(A)$ . Par définition du complémentaire,  $A$  et  $A^c$  sont incompatibles. Or, d'après l'axiome  $(A_2)$ , on a

$$1 = \mathbb{P}(\Omega).$$

On a aussi  $\Omega = A \cup A^c$ . Ainsi, il vient

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c),$$

d'après l'axiome des probabilités totales, vu que  $A$  et  $A^c$  sont incompatibles. Conséquemment, on a le résultat suivant

### Théorème

Soit un évènement  $A$ . Alors,  $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .



## Probabilité de l'évènement contraire - 2

### Remarque

Comme  $\Omega^c = \emptyset$ , on en déduit  $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$ . La probabilité de l'évènement impossible est nulle.

## Probabilité de l'évènement contraire - 2

### Remarque

Comme  $\Omega^c = \emptyset$ , on en déduit  $\mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 0$ . La probabilité de l'évènement impossible est nulle.

Il convient de souligner qu'un évènement de probabilité nulle n'est pas nécessairement impossible. De même, un évènement de probabilité égale à 1 n'est pas nécessairement l'évènement certain. On dira d'ailleurs plutôt qu'un tel évènement est presque sûr.

## Décomposition de tout évènement $B$

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soit un système complet d'évènements,  $(A_1, \dots, A_n)$ . Soit maintenant  $B$  un évènement. On a alors le résultat suivant

## Décomposition de tout évènement $B$

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soit un système complet d'évènements,  $(A_1, \dots, A_n)$ . Soit maintenant  $B$  un évènement. On a alors le résultat suivant

### Théorème

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \dots + \mathbb{P}(B \cap A_n) .$$

## Exemple de décomposition d'un évènement

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. On se donne les quatre évènements suivants :

- $A_1$  := "on obtient un cœur",
- $A_2$  := "on obtient un carreau",
- $A_3$  := "on obtient un pique",
- $A_4$  := "on obtient un trèfle".

Alors  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  est un système complet. Soit  $B$  l'évènement "on a un as". On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \mathbb{P}(B \cap A_3) + \mathbb{P}(B \cap A_4) \\ &= \mathbb{P}(\{\text{on a l'as de cœur}\}) + \mathbb{P}(\{\text{on a l'as de carreau}\}) \\ &\quad + \mathbb{P}(\{\text{on a l'as de pique}\}) + \mathbb{P}(\{\text{on a l'as de trèfle}\}) .\end{aligned}$$

Chacun de ces quatre évènements est de probabilité  $\frac{1}{32}$  d'où l'on a  $\mathbb{P}(B) = 4 \frac{1}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ .

## Exemple particulier de décomposition

À nouveau, on peut s'intéresser au cas particulier du système complet  $(A, A^c)$ . Alors, pour tout événement  $B$ , on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap A^c).$$

# Croissance de la probabilité - 1

Soit une expérience aléatoire  $e$ . Soit  $\Omega$  l'espace fondamental. On considère deux évènements  $A$  et  $B$  liés à cette expérience aléatoire. On a le résultat suivant de croissance de la probabilité

## Croissance de la probabilité - 1

Soit une expérience aléatoire  $e$ . Soit  $\Omega$  l'espace fondamental. On considère deux évènements  $A$  et  $B$  liés à cette expérience aléatoire. On a le résultat suivant de croissance de la probabilité

### Théorème

Si  $A$  implique  $B$  c'est-à-dire si  $A \subset B$ , alors  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .

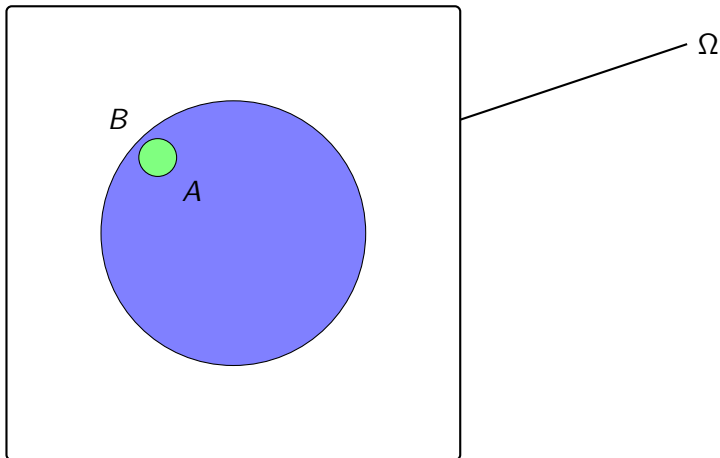


## Croissance de la probabilité - 2

Avec un diagramme de Venn :

## Croissance de la probabilité - 2

Avec un diagramme de Venn :



## Théorème

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soient deux évènements  $A$  et  $B$ . Alors, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) .$$

# Théorème des probabilités totales

## Théorème

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soient deux évènements  $A$  et  $B$ . Alors, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) .$$

## Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

# Théorème des probabilités totales

## Théorème

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soient deux évènements  $A$  et  $B$ . Alors, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) .$$

## Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

## Exercice

Prouver le Théorème des probabilités totales en utilisant un diagramme de Venn.

# Théorème des probabilités totales

## Théorème

Soit une expérience aléatoire  $e$ . On note  $\Omega$  l'espace fondamental associé. Soient deux évènements  $A$  et  $B$ . Alors, on a

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) .$$

## Remarque

Cette formule ressemble à la formule de Grassmann en algèbre linéaire.

## Exercice

Prouver le Théorème des probabilités totales en utilisant un diagramme de Venn.

## Exercice

Soient trois évènements  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Calculer  $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$ , sans utiliser les diagrammes de Venn.

- 1 Définition
- 2 Propriétés
- 3 Espace fondamental dénombrable**
- 4 Espace fondamental non dénombrable
- 5 Équiprobabilité

## Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section,  $\Omega := \{\omega_i, i \in I\}$  où  $I$  est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.



## Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section,  $\Omega := \{\omega_i, i \in I\}$  où  $I$  est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.

On se donne une probabilité  $\mathbb{P}$  sur l'univers  $\Omega$ , c'est-à-dire une fonction de  $2^\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie les trois axiomes de la Définition.

## Caractérisation de la probabilité - 1

Dans cette section,  $\Omega := \{\omega_i, i \in I\}$  où  $I$  est un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices.

On se donne une probabilité  $\mathbb{P}$  sur l'univers  $\Omega$ , c'est-à-dire une fonction de  $2^\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie les trois axiomes de la Définition.

### Théorème

La probabilité  $\mathbb{P}$  sur l'espace fondamental dénombrable  $\Omega$  est entièrement déterminée par la donnée des probabilités des évènements élémentaires (c'est-à-dire celles des singletons) :

$$\mathbb{P}(\{\omega_k\}) =: \mathbb{P}(\omega_k).$$

## Caractérisation de la probabilité - 2

### Preuve

On suppose connues les probabilités élémentaires  $\mathbb{P}(\omega_k)$ , pour tout  $k \in I$ . Montrons alors que l'on peut calculer la probabilité de tout évènement. Soit un évènement  $A$  quelconque. En tant que sous-ensemble de  $\Omega$ , il est fini ou infini dénombrable. Donc, il existe un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices  $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  tel que  $A = \{\omega_j : j \in \mathcal{J}\}$ . De fait, on a

$$A = \bigcup_{j \in \mathcal{J}} \{\omega_j\}.$$

## Caractérisation de la probabilité - 3

Or, les singletons sont deux à deux incompatibles. Ainsi, d'après l'axiome des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \mathbb{P}(\omega_j).$$

La probabilité  $\mathbb{P}(A)$  est ainsi entièrement déterminée pour tout  $A \in 2^\Omega$ .

## Caractérisation de la probabilité - 4

### Remarque

En appliquant ce raisonnement à  $\Omega = \{\omega_i, i \in I\}$ , on a

$$\sum_{i \in I} \mathbb{P}(\omega_i) = 1.$$

# Plan

- 1 Définition
- 2 Propriétés
- 3 Espace fondamental dénombrable
- 4 Espace fondamental non dénombrable**
- 5 Équiprobabilité

## Théorème

Soit un univers  $\Omega$  non dénombrable et muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ . On note  $M \subset \Omega$  le sous-ensemble qui contient les éléments  $\omega$  de probabilité strictement positive. Alors  $M$  est fini ou infini dénombrable.

## Théorème

Soit un univers  $\Omega$  non dénombrable et muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ . On note  $M \subset \Omega$  le sous-ensemble qui contient les éléments  $\omega$  de probabilité strictement positive. Alors  $M$  est fini ou infini dénombrable.

## Preuve

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $M_n := \left\{ \omega : \mathbb{P}(\omega) \geq \frac{1}{n} \right\}$ . On observe que l'on a  $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ . Il suffit maintenant de prouver que l'ensemble  $M_n$  est fini ou infini dénombrable pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . En effet, une réunion dénombrable d'ensembles finis ou infinis dénombrables est un ensemble fini ou infini dénombrable. Supposons par l'absurde que l'un des ensembles  $M_n$  est infini. En particulier, il contient au moins  $2n$  éléments distincts que l'on note  $\omega_1, \dots, \omega_{2n}$ . Puis, il vient  $\mathbb{P}(M_n) \geq \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{P}(\omega_i) \geq 2n \times \frac{1}{n} = 2$  ce qui est impossible car  $\mathbb{P}$  est une probabilité et donc on a  $\mathbb{P}(M_n) \leq \mathbb{P}(\Omega) = 1$ .



## Espace fondamental non dénombrable - 2

À partir de là, deux cas sont possibles. Ou bien  $\mathbb{P}(M) = 1$ , ce qui signifie que l'on peut considérer  $M$  comme nouvel espace fondamental. Ou bien  $\mathbb{P}(M) < 1$ , ce qui signifie qu'une partie de la "masse" est cachée dans les éléments de probabilité égale à 0, lesquels sont en quantité non dénombrable. Dans ce dernier cas, on ne peut caractériser la probabilité  $\mathbb{P}$  par la seule donnée de la nullité de  $\mathbb{P}$  sur chaque évènement élémentaire de  $M^c$ .

## Espace fondamental non dénombrable - 3

### Exemple

On pose  $\Omega := [0; 1]$ . On considère la probabilité  $\mathbb{P}_1$  définie par

$$\mathbb{P}_1(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} dx,$$

où  $\mathcal{I}$  est un intervalle quelconque inclus dans  $[0; 1]$ . On considère la probabilité  $\mathbb{P}_2$  définie par

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} 2x dx.$$

## Espace fondamental non dénombrable - 3

### Exemple

On pose  $\Omega := [0; 1]$ . On considère la probabilité  $\mathbb{P}_1$  définie par

$$\mathbb{P}_1(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} dx,$$

où  $\mathcal{I}$  est un intervalle quelconque inclus dans  $[0; 1]$ . On considère la probabilité  $\mathbb{P}_2$  définie par

$$\mathbb{P}_2(\mathcal{I}) := \int_{\mathcal{I}} 2x dx.$$

On peut vérifier facilement que  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  sont deux probabilités. Également, ces deux probabilités ne sont pas les mêmes puisque  $\mathbb{P}_1([0; \frac{1}{2}]) = \frac{1}{2}$  alors que  $\mathbb{P}_2([0; \frac{1}{2}]) = \frac{1}{4}$ . Et pourtant, pour tout  $\omega \in \Omega = [0; 1]$ , on a  $\mathbb{P}_1(\{\omega\}) = \mathbb{P}_2(\{\omega\}) = 0$ .

- 1 Définition
- 2 Propriétés
- 3 Espace fondamental dénombrable
- 4 Espace fondamental non dénombrable
- 5 Équiprobabilité

## Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental  $\Omega$  fini :  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  avec  $N < \infty$ . On a donc  $N = \#\Omega$ .

### Définition

Dans le cas particulier où  $\mathbb{P}(\omega_1) = \dots = \mathbb{P}(\omega_N)$ , on dit que l'espace fondamental fini  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité.

## Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental  $\Omega$  fini :  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  avec  $N < \infty$ . On a donc  $N = \#\Omega$ .

### Définition

Dans le cas particulier où  $\mathbb{P}(\omega_1) = \dots = \mathbb{P}(\omega_N)$ , on dit que l'espace fondamental fini  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité.

### Théorème

Si  $\mathbb{P}$  est l'équiprobabilité sur  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ , on a  $\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega}$  pour tout  $1 \leq k \leq N$ .

## Équiprobabilité - 1

Soit un espace fondamental  $\Omega$  fini :  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$  avec  $N < \infty$ . On a donc  $N = \#\Omega$ .

### Définition

Dans le cas particulier où  $\mathbb{P}(\omega_1) = \dots = \mathbb{P}(\omega_N)$ , on dit que l'espace fondamental fini  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité.

### Théorème

Si  $\mathbb{P}$  est l'équiprobabilité sur  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ , on a  $\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{N} = \frac{1}{\#\Omega}$  pour tout  $1 \leq k \leq N$ .

### Remarque

Une probabilité sur un univers  $\Omega$  fini n'est pas nécessairement l'équiprobabilité.

## Équiprobabilité - 2

### Théorème

Si  $\mathbb{P}$  est l'équiprobabilité sur  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ , on a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\{\text{cas favorables}\}}{\#\{\text{cas possibles}\}} = \frac{\#A}{\#\Omega}.$$

pour tout évènement  $A$ .



## Équiprobabilité - 3

### Exemple

On jette un dé à six faces que l'on suppose non pipé. Les six résultats possibles  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$  et  $\omega_6$  sont équiprobables. Ainsi, l'univers  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$  est muni de l'équiprobabilité :

$$\mathbb{P}(\omega_k) = \frac{1}{6},$$

pour tout  $1 \leq k \leq 6$ . Soit l'évènement  $A :=$  "on obtient une face paire". Alors,  $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$  puis

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

## Exemple

On prend huit cartes dans un jeu de trente-deux cartes. On a exactement  $\binom{32}{8} = \frac{32!}{8!24!} = 10\,518\,300$  façons de le faire. L'espace fondamental  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité. On considère l'évènement  $A :=$  "on ne prend aucun as". Il vient alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.295.$$

## Exemple

On prend huit cartes dans un jeu de trente-deux cartes. On a exactement  $\binom{32}{8} = \frac{32!}{8!24!} = 10\,518\,300$  façons de le faire. L'espace fondamental  $\Omega$  est muni de l'équiprobabilité. On considère l'évènement  $A :=$ “on ne prend aucun as”. Il vient alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\binom{28}{8}}{\binom{32}{8}} \approx 0.295.$$

## Définition

On dit que le tirage d'un individu de la population  $P$  finie est au hasard lorsque tout individu a la même probabilité d'être tiré. En d'autres termes, un tirage au hasard est fait suivant l'équiprobabilité.