Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 2 : Bases des Probabilités (Partie 1).

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

1. Définitions
   - Notion d'ensemble
   - Ensemble vide
   - Inclusion, Sous-ensembles
2. Opérations sur les ensembles
3. Partition d'un ensemble
4. Rappels sur la dénombrabilité
5. Modélisation d'une expérience aléatoire

Notion d'ensemble

On considère la notion intuitive suivante d'un ensemble Ω (qui désignera dans les prochains chapitres l'univers).

Définition

Un ensemble Ω est une collection d'objets. Il est déterminé lorsque l'on peut dire si un objet ω lui appartient ou ne lui appartient pas.

Notion d'ensemble

On considère la notion intuitive suivante d'un ensemble Ω (qui désignera dans les prochains chapitres l'univers).

Définition

Un ensemble Ω est une collection d'objets. Il est déterminé lorsque l'on peut dire si un objet ω lui appartient ou ne lui appartient pas.

Notations

Si l'objet ω appartient à l'ensemble Ω, on note : $\omega \in \Omega$.
Si l'objet ω n'appartient pas à l'ensemble Ω, on note : $\omega \notin \Omega$.

Notion d'ensemble

On considère la notion intuitive suivante d'un ensemble Ω (qui désignera dans les prochains chapitres l'univers).

Définition

Un ensemble Ω est une collection d'objets. Il est déterminé lorsque l'on peut dire si un objet ω lui appartient ou ne lui appartient pas.

Notations

Si l'objet ω appartient à l'ensemble Ω, on note : $\omega \in \Omega$.
Si l'objet ω n'appartient pas à l'ensemble Ω, on note : $\omega \notin \Omega$.

Définition

Un objet ω appartenant à l'ensemble Ω ($\omega \in \Omega$) est appelé un élément de Ω.

Diagramme de Venn

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter l'appartenance à un ensemble :

Diagramme de Venn

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter l'appartenance à un ensemble :

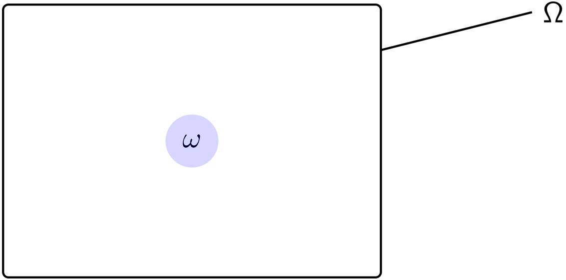
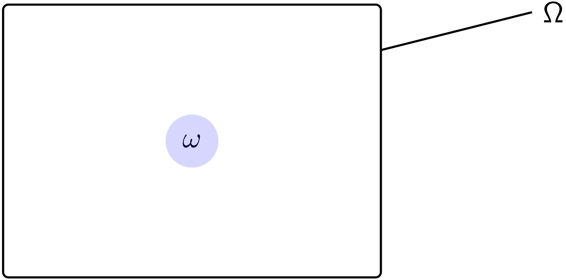


Diagramme de Venn

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter l'appartenance à un ensemble :



Il faut toutefois garder à l'esprit que le diagramme de Venn ne saurait se substituer au raisonnement.

Ensemble vide

Définition

On définit l'ensemble vide comme étant l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Ensemble vide

Définition

On définit l'ensemble vide comme étant l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Notation

L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Ensemble vide

Définition

On définit l'ensemble vide comme étant l'ensemble qui ne contient aucun élément.

Notation

L'ensemble vide est noté $\emptyset$.

Remarque

Il ne faut pas confondre l'ensemble vide ($\emptyset$) avec le zéro (0). On a coutume de dire : “Être nul, c'est déjà exister”.

Définition

Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B. Plus formellement, A est inclus dans B lorsque

$$\forall \omega \in A\,,\ \omega \in B\,.$$

Définition

Définition

On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B lorsque tout élément de A appartient à B. Plus formellement, A est inclus dans B lorsque

$$\forall\omega \in A\,,\ \omega \in B\,.$$

Remarque

On dit aussi que B contient A ou que A est un sous-ensemble de B.

Notations

Notation

Si A est un sous-ensemble de B, on note : $A \subset B$.

Notations

Notation

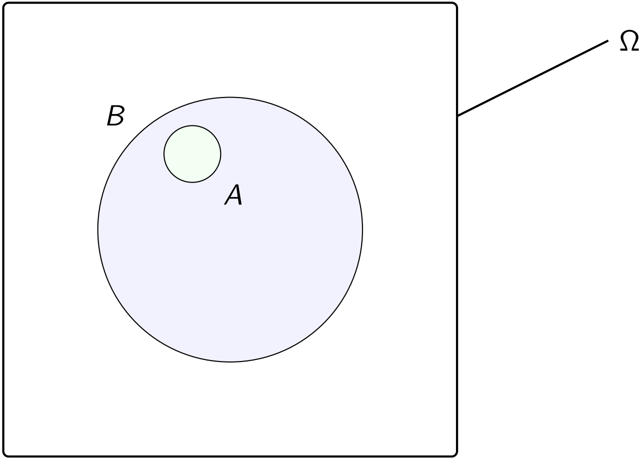
Si A est un sous-ensemble de B, on note : $A \subset B$.

Notation

On peut aussi trouver la notation $B \supset A$.

Diagramme de Venn

Diagramme de Venn



Exemple

Exemple

Soit Ω l'ensemble des étudiants en France. Soit B l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des FISE1 de Télécom Saint-Étienne.

Exemple

Exemple

Soit Ω l'ensemble des étudiants en France. Soit B l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des FISE1 de Télécom Saint-Étienne.

Alors, A est inclus dans B : $A \subset B$.

Exemple

Exemple

Soit Ω l'ensemble des étudiants en France. Soit B l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des FISE1 de Télécom Saint-Étienne.

Alors, A est inclus dans B : $A \subset B$.

Remarque

On peut remarquer dans l'exemple précédent que l'on a bien $A \subset \Omega$ et $B \subset \Omega$.

Un théorème crucial

Théorème

Soient deux ensembles A et B. Alors, $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Un théorème crucial

Théorème

Soient deux ensembles A et B. Alors, $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

Remarque

Dans la pratique, démontrer que deux ensembles sont égaux n'est pas toujours évident. On peut alors, d'après le Théorème procéder par double inclusion.

Plan

Définition

Définition

On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A et à B.

Définition

Définition

On appelle intersection de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments communs à A et à B.

Notation

L'intersection de deux ensembles A et B est notée $A \cap B$.

Plus formellement, on peut écrire :

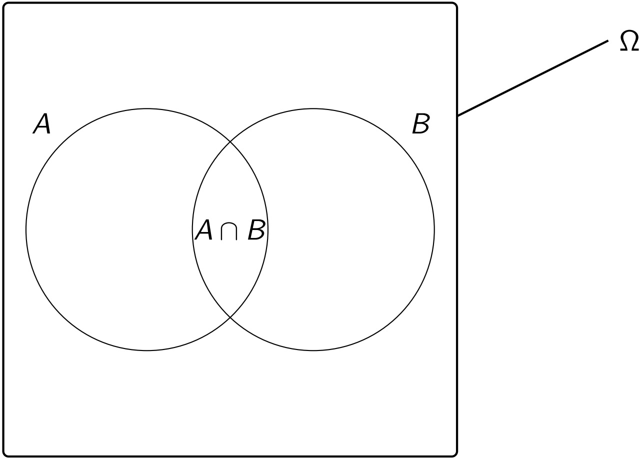
$$A \cap B = \{\omega \ : \ \omega \in A \, , \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cap B \iff \omega \in A \text{ et } \omega \in B \, .$$

Diagramme de Venn

Diagramme de Venn



Exemples - 1

Exemple : Ensemble fini petit

Soit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un ensemble de lettres. Soient les deux sous-ensembles de Ω : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cap B = \{c, d, e\}$.

Exemples - 1

Exemple : Ensemble fini petit

Soit $\Omega := \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ un ensemble de lettres. Soient les deux sous-ensembles de Ω : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cap B = \{c, d, e\}$.

Exemple : Ensemble fini grand

Soit Ω l'ensemble des ingénieurs formés en France. Soit A le sous-ensemble des ingénieurs exerçant dans l'industrie. Soit B l'ensemble des ingénieurs diplômés de Télécom Saint-Étienne (TSE). Alors, $A \cap B$ est l'ensemble des ingénieurs diplômés de TSE qui travaillent dans l'industrie.

Exemples - 2

Exemple :Ensemble infini dénombrable

Soit $\Omega := \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit A le sous-ensemble des nombres premiers et soit B celui des nombres pairs. Alors, $A \cap B$ est le singleton $\{2\}$.

Exemples - 2

Exemple :Ensemble infini dénombrable

Soit $\Omega := \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit A le sous-ensemble des nombres premiers et soit B celui des nombres pairs. Alors, $A \cap B$ est le singleton $\{2\}$.

Exemple : Ensemble infini non dénombrable

Soit Ω l'ensemble des réels strictement positifs. Soit A l'ensemble des réels strictement plus grands que 1. Soit $B :=]0; 4]$. Alors, $A \cap B$ est l'intervalle $]1; 4]$.

Ensembles disjoints - 1

Définition : Ensembles disjoints

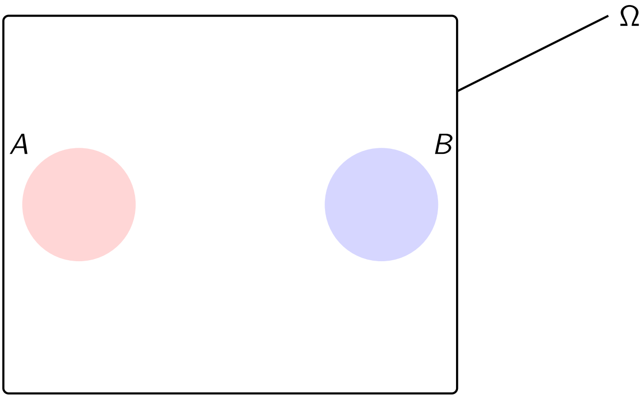
On dit que deux ensembles A et B sont disjoints lorsque leur intersection est vide : ils n'ont aucun élément en commun. En d'autres termes, on dit que A et B sont disjoints si l'on a $A \cap B = \emptyset$.

Ensembles disjoints - 2

Avec un diagramme de Venn :

Ensembles disjoints - 2

Avec un diagramme de Venn :



Propriétés de l'intersection

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cap B = B \cap A$.

Propriétés de l'intersection

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cap B = B \cap A$.

Associativité

Soient trois ensembles A, B et C.

Alors :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C\,.$$

Propriétés de l'intersection

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cap B = B \cap A$.

Associativité

Soient trois ensembles A, B et C.

Alors :

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C =: A \cap B \cap C\,.$$

Proposition

Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$.

Définition

Définition

On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou (au sens inclusif) qui sont dans B.

Définition

Définition

On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou (au sens inclusif) qui sont dans B.

Notation

La réunion de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$.

Définition

Définition

On appelle réunion de deux ensembles A et B l'ensemble des éléments qui sont dans A ou (au sens inclusif) qui sont dans B.

Notation

La réunion de deux ensembles A et B est notée $A \cup B$.

Plus formellement, on peut écrire :

$$A \cup B = \{\omega \ : \ \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$$

ou

$$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \text{ ou } \omega \in B \, .$$

Diagramme de Venn

Avec un diagramme de Venn :

Avec un diagramme de Venn :

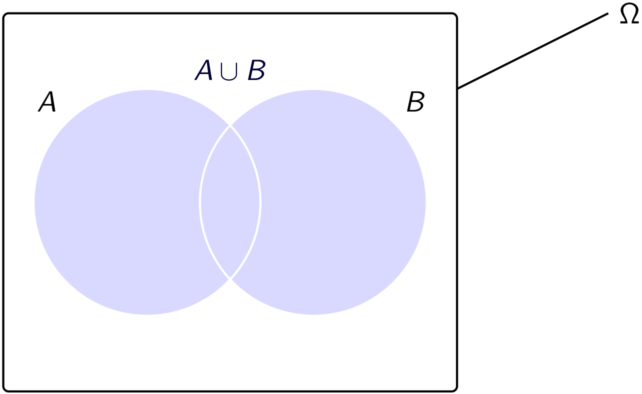
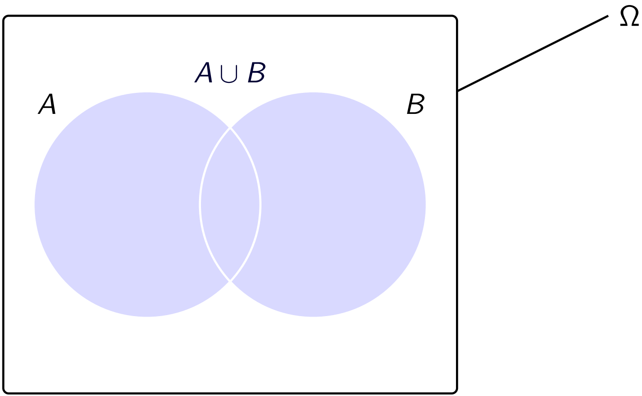


Diagramme de Venn

Avec un diagramme de Venn :



On remarque dans ce diagramme que l'on a

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap B \subset B \subset A \cup B\,.$$

Exemples - 1

Exemple : Ensembles finis petits

Soit Ω l'alphabet français. Soient les deux ensembles de lettres : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Exemples - 1

Exemple : Ensembles finis petits

Soit Ω l'alphabet français. Soient les deux ensembles de lettres : $A := \{a, b, c, d, e\}$ et $B := \{c, d, e, f, g\}$. Alors, on a : $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.

Exemple : Ensembles finis grands

Soit Ω l'ensemble des étudiants de Saint-Étienne. Soit A l'ensemble des étudiants de Télécom Saint-Étienne et soit B l'ensemble des étudiants de l'IUT de Saint-Étienne. Alors $A \cup B$ est l'ensemble des étudiants de TSE ou de l'IUT.

Exemples - 2

Exemple : Ensemble infini dénombrable

Soit $\Omega := \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Soit A le sous-ensemble des nombres pairs positifs et soit B celui des nombres impairs positifs. Alors, $A \cup B = \mathbb{N}$.

Exemples - 2

Exemple : Ensemble infini dénombrable

Soit $\Omega := \mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Soit A le sous-ensemble des nombres pairs positifs et soit B celui des nombres impairs positifs. Alors, $A \cup B = \mathbb{N}$.

Exemple : Ensemble infini non dénombrable

Soit Ω l'ensemble des réels strictement positifs. Soit $A := [1; 3]$ et soit $B :=]2; 4]$. Alors, $A \cup B$ est l'intervalle $[1; 4]$.

Propriétés de la réunion

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cup B = B \cup A$.

Propriétés de la réunion

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cup B = B \cup A$.

Associativité

Soient trois ensembles A, B et C.

Alors :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C\,.$$

Propriétés de la réunion

Commutativité

Soient deux ensembles A et B.

Alors $A \cup B = B \cup A$.

Associativité

Soient trois ensembles A, B et C.

Alors :

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C =: A \cup B \cup C\,.$$

Proposition

Soit un ensemble A. Alors, on a $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$.

Distributivité

Proposition

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \ .$$

Distributivité

Proposition

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \; .$$

Proposition

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \; .$$

Distributivité

Proposition

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Proposition

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) .$$

Comme la réunion est distributive par rapport à l'intersection et comme l'intersection est distributive par rapport à la réunion, il faut *systématiquement* mettre des parenthèses quand on utilise l'intersection *et* la réunion.

Définition

Définition

Soit un ensemble Ω (l'univers des évènements). Soit A un sous-ensemble de Ω. On appelle complémentaire de A dans Ω l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Définition

Définition

Soit un ensemble Ω (l'univers des évènements). Soit A un sous-ensemble de Ω. On appelle complémentaire de A dans Ω l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Notation

Le complémentaire de A est noté $\overline{A}$ ou A^c.

Définition

Définition

Soit un ensemble Ω (l'univers des évènements). Soit A un sous-ensemble de Ω. On appelle complémentaire de A dans Ω l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A.

Notation

Le complémentaire de A est noté $\overline{A}$ ou A^c.

Plus formellement, on a :

$$A^c = \{\omega \in \Omega \ : \ \omega \notin A\}$$

ou

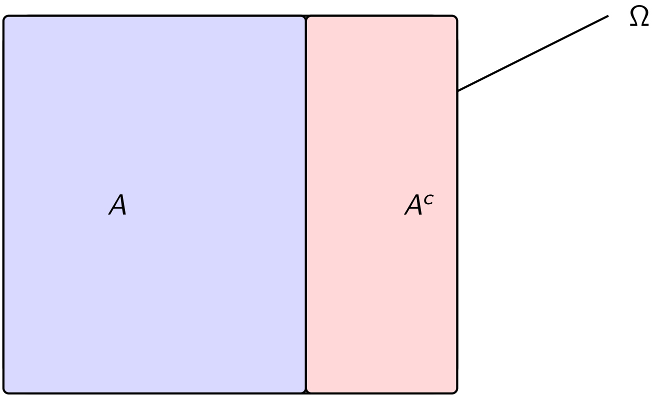
$$\omega \in A^c \iff \omega \notin A\,.$$

Diagramme de Venn

Avec un diagramme de Venn :

Diagramme de Venn

Avec un diagramme de Venn :



Propriétés

Proposition

Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $(A^c)^c = A$.

Propriétés

Proposition

Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $(A^c)^c = A$.

Remarque

On dit que la complémentation est involutive.

Propriétés

Proposition

Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $(A^c)^c = A$.

Remarque

On dit que la complémentation est involutive.

Proposition

Soit un ensemble Ω. Alors, $\Omega^c = \emptyset$. De même, $\emptyset^c = \Omega$.

Propriétés

Proposition

Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $(A^c)^c = A$.

Remarque

On dit que la complémentation est involutive.

Proposition

Soit un ensemble Ω. Alors, $\Omega^c = \emptyset$. De même, $\emptyset^c = \Omega$.

Proposition

Soit un ensemble Ω et soit A un sous-ensemble de Ω. Alors, $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cup A^c = \Omega$.

Lois de Morgan

Théorème : Lois de Morgan

Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Alors, on a

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

et

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \, .$$

Lois de Morgan

Théorème : Lois de Morgan

Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Alors, on a

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

et

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,.$$

Elles s'illustrent particulièrement bien en regardant les diagrammes de Venn associés.

Lois de Morgan

Théorème : Lois de Morgan

Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Alors, on a

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

et

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,.$$

Elles s'illustrent particulièrement bien en regardant les diagrammes de Venn associés.

Exercice

Prouver les lois de Morgan avec des diagrammes de Venn.

Lois de Morgan

Théorème : Lois de Morgan

Soit un ensemble Ω et soient A et B deux sous-ensembles de Ω. Alors, on a

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

et

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c\,.$$

Elles s'illustrent particulièrement bien en regardant les diagrammes de Venn associés.

Exercice

Prouver les lois de Morgan avec des diagrammes de Venn.

Exercice

Démontrer rigoureusement (c'est-à-dire sans utiliser de diagramme de Venn) les lois de Morgan.

Plan

Partition d'un ensemble - 1

Définition

Soit Ω un ensemble et n sous-ensembles de Ω : $A_1, \cdots, A_n$. On dit qu'ils forment une partition de Ω s'ils sont deux à deux disjoints et si leur réunion est égale à Ω.

Plus formellement, $(A_1, \cdots, A_n)$ est une partition de Ω si et seulement si

$$A_k \cap A_p = \emptyset \quad \text{si } 1 \leq k \neq p \leq n$$

et

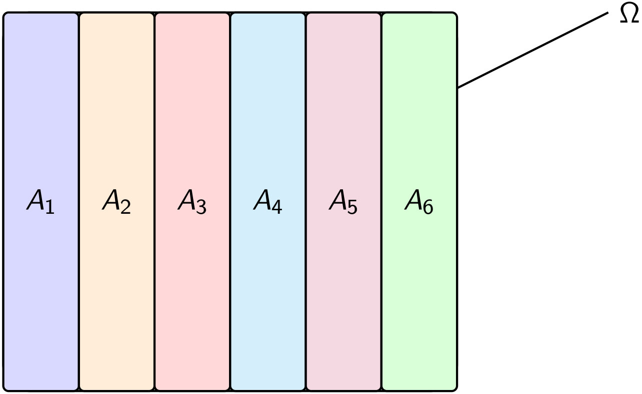
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \, .$$

Partition d'un ensemble - 2

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter la partition d'un ensemble :

Partition d'un ensemble - 2

Il peut être pratique d'utiliser un diagramme de Venn pour se représenter la partition d'un ensemble :



Exemple de partition

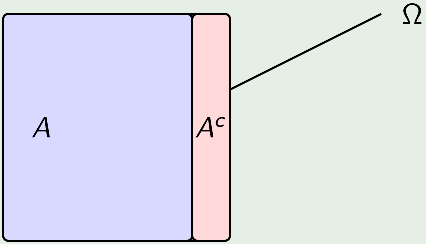
Exemple : Cas particulier de partition

Soit Ω un ensemble. Soit A un sous-ensemble de Ω. Alors (A, A^c) est une partition de Ω. En effet, on a $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cup A^c = \Omega$ par définition. Regardons cela sur un diagramme de Venn :

Exemple de partition

Exemple : Cas particulier de partition

Soit Ω un ensemble. Soit A un sous-ensemble de Ω. Alors (A, A^c) est une partition de Ω. En effet, on a $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cup A^c = \Omega$ par définition. Regardons cela sur un diagramme de Venn :



Plan

Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.

Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.

Exemple

Par exemple, l'ensemble $[\![1;17\ 000]\!]$ est fini puisqu'il contient un nombre fini d'éléments (17 000).

Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.

Exemple

Par exemple, l'ensemble $[\![1; 17\ 000]\!]$ est fini puisqu'il contient un nombre fini d'éléments (17 000).

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.

Exemple

Par exemple, l'ensemble $[\![1; 17\ 000]\!]$ est fini puisqu'il contient un nombre fini d'éléments (17 000).

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Définition

Le cardinal d'un ensemble E est noté $\#E$.

Ensembles finis

Définition

On dit qu'un ensemble est de cardinal fini s'il contient un nombre fini d'éléments.

Exemple

Par exemple, l'ensemble $[\![1; 17\ 000]\!]$ est fini puisqu'il contient un nombre fini d'éléments (17 000).

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini est le nombre d'éléments de cet ensemble.

Définition

Le cardinal d'un ensemble E est noté $\#E$.

Exemple

Le cardinal de l'ensemble $[\![0; 4\ 815\ 162\ 342]\!]$ est 4 815 162 343.

Ensembles infinis

Définition

Un ensemble qui n'est pas de cardinal fini est dit infini.

Ensembles infinis

Définition

Un ensemble qui n'est pas de cardinal fini est dit infini.

Exemple

L'ensemble $\mathbb{N}$ est infini. De même, $\mathbb{R}$ est infini.

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.

Contre-exemple

L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.

Contre-exemple

L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.

Proposition

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est soit un ensemble fini soit un ensemble infini dénombrable.

Ensembles dénombrables

Définition

On dit qu'un ensemble infini est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple

L'ensemble des rationnels, $\mathbb{Q}$, est dénombrable.

Contre-exemple

L'ensemble des réels, $\mathbb{R}$, n'est pas dénombrable.

Proposition

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est soit un ensemble fini soit un ensemble infini dénombrable.

Remarque

Il arrive parfois que le mot "dénombrable" signifie en fait "fini ou infini dénombrable".

Plan

Remarque générale

Le résultat d'une expérience est dit aléatoire lorsqu'on ne peut pas le prédire avec certitude. Plusieurs raisons peuvent expliquer cette impossibilité de prédiction : on ne connaît pas toutes les conditions initiales (les causes) ou on ne sait pas déterminer comment le système évolue précisément. L'expérience est alors dite aléatoire.

Exemple d'expérience aléatoire - 1

Exemple

Jeter un dé à six faces est une expérience aléatoire. On peut énumérer quelques causes de variabilité du résultat :

- position exacte de la main (hauteur, angles...),
- position exacte du dé dans la main,
- vitesse à laquelle le dé est lancé de la main,
- état exact de la surface de réception,
- état exact du dé (coins plus ou moins arrondis, poids du dé...),
- résistance de l'air,

et beaucoup d'autres. Il est difficile de fixer *a priori* les valeurs exactes des différents paramètres.

Exemple d'expérience aléatoire - 2

Cependant, on constate que si l'on jette un dé à six faces un grand nombre de fois, on obtient en moyenne :

- une fois sur six la face 1,
- une fois sur six la face 2,
- une fois sur six la face 3,
- une fois sur six la face 4,
- une fois sur six la face 5,
- une fois sur six la face 6.

À partir de là, on peut définir une loi de variabilité du résultat.

Exemple d'expérience aléatoire - 2

Cependant, on constate que si l'on jette un dé à six faces un grand nombre de fois, on obtient en moyenne :

- une fois sur six la face 1,
- une fois sur six la face 2,
- une fois sur six la face 3,
- une fois sur six la face 4,
- une fois sur six la face 5,
- une fois sur six la face 6.

À partir de là, on peut définir une loi de variabilité du résultat.

Exemple

On peut aussi penser à l'expérience consistant à faire un enfant : celui-ci sera-t-il un garçon ou une fille ? Au moment de la conception, il est difficile de prévoir le résultat de l'expérience.

Univers - 1

On définit les résultats possibles (ω) d'une expérience aléatoire.

Exemple

Expérience aléatoire : jeter un dé. Les résultats possibles sont alors

- ω_1 :="on obtient la face 1",
- ω_2 :="on obtient la face 2",
- ω_3 :="on obtient la face 3",
- ω_4 :="on obtient la face 4",
- ω_5 :="on obtient la face 5",
- ω_6 :="on obtient la face 6".

Univers - 2

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou l'univers. Il est noté Ω.

Univers - 2

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou l'univers. Il est noté Ω.

La définition des résultats possibles (et donc de l'univers) n'est pas nécessairement unique. On pourrait considérer $\widetilde{\Omega} := \{p, i\}$ où p est le résultat "la face obtenue est paire" et i est le résultat "la face obtenue est impaire".

Univers - 2

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou l'univers. Il est noté Ω.

La définition des résultats possibles (et donc de l'univers) n'est pas nécessairement unique. On pourrait considérer $\widetilde{\Omega} := \{p, i\}$ où p est le résultat "la face obtenue est paire" et i est le résultat "la face obtenue est impaire".

L'enjeu du choix de l'univers répond donc à deux contraintes. Il faut que l'univers soit suffisamment riche pour répondre aux questions que l'on se pose. Mais il faut également qu'il soit suffisamment simple pour que l'on puisse travailler dessus.

Univers - 2

Définition

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé l'espace fondamental ou l'univers. Il est noté Ω.

La définition des résultats possibles (et donc de l'univers) n'est pas nécessairement unique. On pourrait considérer $\widetilde{\Omega} := \{p, i\}$ où p est le résultat "la face obtenue est paire" et i est le résultat "la face obtenue est impaire".

L'enjeu du choix de l'univers répond donc à deux contraintes. Il faut que l'univers soit suffisamment riche pour répondre aux questions que l'on se pose. Mais il faut également qu'il soit suffisamment simple pour que l'on puisse travailler dessus.

Remarque

L'espace fondamental associé à une expérience aléatoire peut être fini, infini dénombrable ou infini non dénombrable.

Exemples d'univers - 1

Univers fini

On considère l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard un individu d'une population de N individus numérotés de 1 à N. Certains de ces individus vérifient une propriété (P). Il peut s'agir d'une population d'électeurs et la propriété (P) correspond alors à une intention de vote. Il peut aussi s'agir d'une population de pièces fabriquées par une machine et la propriété (P) correspond alors à la défectuosité de la pièce.

Première définition : Les résultats possibles sont ω_k :="on obtient l'individu k". L'espace fondamental est alors $\Omega := \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$. Il est fini.

Seconde définition : Les résultats possibles sont ω_+ :="l'individu obtenu a la propriété (P)" et ω_- :="l'individu obtenu n'a pas la propriété (P)". L'espace fondamental est alors $\Omega := \{\omega_+, \omega_-\}$. Il est fini également.

Exemples d'univers - 2

Univers infini dénombrable

On considère l'expérience aléatoire suivante : on observe le nombre d'octets échangés dans un système de pair à pair durant un intervalle de temps de durée fixée. Les résultats possibles sont ainsi $\omega_k :=$"k octets sont échangés durant l'intervalle de temps" avec $k \in \mathbb{N}$. L'espace fondamental est alors $\Omega := \{\omega_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$. Il est infini dénombrable.

Exemples d'univers - 2

Univers infini dénombrable

On considère l'expérience aléatoire suivante : on observe le nombre d'octets échangés dans un système de pair à pair durant un intervalle de temps de durée fixée. Les résultats possibles sont ainsi $\omega_k :=$"k octets sont échangés durant l'intervalle de temps" avec $k \in \mathbb{N}$. L'espace fondamental est alors $\Omega := \{\omega_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$. Il est infini dénombrable.

Univers infini non dénombrable

On considère l'expérience aléatoire suivante : on observe la durée de vie, en heures, d'un composant électronique. Il s'agit d'une étude de fiabilité. Les résultats possibles sont ainsi $\omega_t :=$"la durée de vie du composant est t" avec $t \geq 0$. L'espace fondamental est alors $\Omega := \{\omega_t \ : \ t \geq 0\}$. Il est infini non dénombrable.

Les évènements - 1

Définition

On appelle évènement associé à une expérience aléatoire toute proposition logique relative au résultat de cette expérience.

Les évènements - 1

Définition

On appelle évènement associé à une expérience aléatoire toute proposition logique relative au résultat de cette expérience.

Exemple

Si l'expérience aléatoire est le lancer de dé, un évènement peut être $A :=$"obtenir une face paire".

Les évènements - 1

Définition

On appelle évènement associé à une expérience aléatoire toute proposition logique relative au résultat de cette expérience.

Exemple

Si l'expérience aléatoire est le lancer de dé, un évènement peut être $A :=$"obtenir une face paire".

Contre-exemple

Si l'expérience aléatoire est le lancer de dé, $B :=$"il va pleuvoir demain" n'est pas un évènement.

Les évènements - 2

On représente un évènement par l'ensemble des résultats possibles qui vérifient la proposition qui le définit : c'est un sous-ensemble de l'espace fondamental Ω. À partir de maintenant, on confond l'évènement et le sous-ensemble qui le représente.

Ainsi, un évènement n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble de l'univers Ω.

Les évènements - 2

On représente un évènement par l'ensemble des résultats possibles qui vérifient la proposition qui le définit : c'est un sous-ensemble de l'espace fondamental Ω. À partir de maintenant, on confond l'évènement et le sous-ensemble qui le représente.

Ainsi, un évènement n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble de l'univers Ω.

Exemple

Si l'expérience aléatoire est le lancer de dé, on pose $A :=$"on obtient une face paire". L'espace fondamental est $\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ et l'on écrit $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

Les évènements - 3

Définition : Évènement certain

On dit qu'un évènement A est certain si tous les résultats vérifient la proposition logique qui le définit : $A = \Omega$.

Les évènements - 3

Définition : Évènement certain

On dit qu'un évènement A est certain si tous les résultats vérifient la proposition logique qui le définit : $A = \Omega$.

Définition : Évènement impossible

On dit qu'un évènement A est impossible si aucun résultat possible ne vérifie la proposition logique qui le définit : $A = \emptyset$.

Les évènements - 3

Définition : Évènement certain

On dit qu'un évènement A est certain si tous les résultats vérifient la proposition logique qui le définit : $A = \Omega$.

Définition : Évènement impossible

On dit qu'un évènement A est impossible si aucun résultat possible ne vérifie la proposition logique qui le définit : $A = \emptyset$.

Remarque

Jusqu'à maintenant, on ne parle pas de probabilités.

Implication - 1

Définition

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire. On dit que A implique B lorsque à chaque fois que A est réalisé, B l'est également.

Implication - 1

Définition

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire. On dit que A implique B lorsque à chaque fois que A est réalisé, B l'est également.

Notation

Si A implique B, on note $A \Rightarrow B$.

Implication - 2

Remarque : Traduction ensembliste

À chaque fois que A est réalisé, B l'est également. En d'autres termes, pour tout $\omega \in A$, on a $\omega \in B$. Ceci signifie $A \subset B$. On a donc

$$(A \Rightarrow B) \iff (A \subset B) .$$

Opérations sur les évènements

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire.

Définition

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A et B sont tous les deux réalisés. Traduction ensembliste : $E = A \cap B$.

Opérations sur les évènements

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire.

Définition

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A et B sont tous les deux réalisés. Traduction ensembliste : $E = A \cap B$.

Définition

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé. Traduction ensembliste : $E = A \cup B$.

Opérations sur les évènements

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire.

Définition

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A et B sont tous les deux réalisés. Traduction ensembliste : $E = A \cap B$.

Définition

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A ou B est réalisé. Traduction ensembliste : $E = A \cup B$.

Définition : Contraire d'un évènement

On considère l'évènement E qui est réalisé si et seulement si A n'est pas réalisé. Traduction ensembliste : $E = A^c = \overline{A}$.

Évènements incompatibles

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire.

Définition

Si les deux évènements A et B ne peuvent pas être réalisés simultanément, on dit qu'ils sont incompatibles. Traduction ensembliste : $A \cap B = \emptyset$. On dit aussi que A et B sont disjoints.

Évènements incompatibles

Soient deux évènements A et B associés à une même expérience aléatoire.

Définition

Si les deux évènements A et B ne peuvent pas être réalisés simultanément, on dit qu'ils sont incompatibles. Traduction ensembliste : $A \cap B = \emptyset$. On dit aussi que A et B sont disjoints.

ATTENTION !

Il est essentiel de différencier la notion d'évènements disjoints de la notion d'indépendance d'évènements que nous verrons par la suite. Nous insistons donc pour que l'étudiant soit précautionneux à ce sujet.

Système complet d'évènements

Définition

Soient $A_1, \cdots, A_n$ des évènements associés à une même expérience aléatoire. On dit qu'ils forment un système complet d'évènements si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

- les évènements sont deux à deux incompatibles,
- à chaque répétition de l'expérience aléatoire, l'un des n évènements est réalisé.

Système complet d'évènements

Définition

Soient $A_1, \cdots, A_n$ des évènements associés à une même expérience aléatoire. On dit qu'ils forment un système complet d'évènements si les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :

- les évènements sont deux à deux incompatibles,
- à chaque répétition de l'expérience aléatoire, l'un des n évènements est réalisé.

Traduction ensembliste

$(A_1, \cdots, A_n)$ est un système complet d'évènements de l'expérience aléatoire si et seulement si $(A_1, \cdots, A_n)$ est une partition de l'espace fondamental Ω.