Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 1 : Intégration (Point de vue pratique).

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v. Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v. Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Principe général

Rappel

Soient deux fonctions dérivables (et de dérivées continues) u et v. Alors, la dérivée de $u \times v$ est $u'v + uv'$.

Théorème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Lorsque l'on doit calculer une intégrale $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, la difficulté est de choisir u et v telles que $f = u'v$ et telles que uv' soit plus facile à intégrer que $u'v$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.
- Au contraire, on intègre généralement l'exponentielle car elle est égale à son intégrale. Donc $\int_0^x t\exp(t)\mathrm{d}t = (x-1)\exp(x) + 1$.

Exemples

- $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t$. On intègre 1 et on dérive le logarithme. En effet, la primitive de 1 est x et la dérivée du logarithme est $\frac{1}{x}$. Donc $\int_1^x \log(t)\mathrm{d}t = x\log(x) - x + 1$.
- Au contraire, on intègre généralement l'exponentielle car elle est égale à son intégrale. Donc $\int_0^x t\exp(t)\mathrm{d}t = (x-1)\exp(x) + 1$.
- $I(x) := \int_0^x \cos(t)\exp(t)\mathrm{d}t$. Alors : $I(x) = \cos(x)\exp(x) - 1 + \int_0^x \sin(t)\exp(t)\mathrm{d}t = \cos(x)\exp(x) - 1 + \sin(x)\exp(x) - \int_0^x \cos(t)\exp(t)\mathrm{d}t$ d'où $I(x) = \frac{\cos(x)+\sin(x)}{2}\exp(x) - \frac{1}{2}$.

Plan

Principe général

Rappel

$\mathrm{d}(f\circ g)(x)=(f'\circ g)(x)g'(x)\mathrm{d}x.$

Principe général

Rappel

$\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x) \mathrm{d}x.$

Théorème

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que φ' est continue. On suppose de plus que φ est bijective sur $[a; b]$. On se donne une fonction f continue sur $[\varphi(a); \varphi(b)]$. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x) \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \mathrm{d}x \,.$$

Principe général

Rappel

$\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f' \circ g)(x) g'(x) \mathrm{d}x.$

Théorème

Soit φ une fonction dérivable sur l'intervalle $[a; b]$ et telle que φ' est continue. On suppose de plus que φ est bijective sur $[a; b]$. On se donne une fonction f continue sur $[\varphi(a); \varphi(b)]$. Alors, on a :

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \mathrm{d}x \, .$$

Remarque

Pour calculer $\int_a^b g(x) \mathrm{d}x$, la difficulté est de choisir f et φ telles que $g = f \circ \varphi$ et telles que f soit plus facile à intégrer que g.

Exemple

On considère l'intégrale

$$I := \int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\,.$$

On pose $u(x) := \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où $x = \frac{1+u(x)^2}{1-u(x)^2}$. Puis, $\frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\log|x| = \mathrm{d}\log|1+u(x)^2| - \mathrm{d}\log|1-u(x)^2| = \frac{2u(x)\mathrm{d}u(x)}{1+u(x)^2} + \frac{2u(x)\mathrm{d}u(x)}{1-u(x)^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2u^2}{1-u^2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} - 2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u \\
&= -2\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} \\
&= -\frac{\pi}{3} + \log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|\,.
\end{aligned}$$

Plan

Techniques

Les deux intégrales élémentaires

En utilisant la décomposition en éléments simples et le changement de variables, il suffit de connaître les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log |x|$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)\,.$$

Techniques

Les deux intégrales élémentaires

En utilisant la décomposition en éléments simples et le changement de variables, il suffit de connaître les deux intégrales suivantes :

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \log|x|$$

et

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan(x)\,.$$

Autre intégrale utile

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\left(x^2+1\right)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\log(x^2+1)\,.$$

Idée générale

Fonctions impliquant cos, sin et/ou tan

On cherche à calculer une intégrale de la forme

$$\int f\left(\cos(x),\sin(x),\tan(x)\right)\mathrm{d}x$$

où f est une fonction continue, typiquement une fonction polynômiale ou une fraction rationnelle. Il faut alors procéder à un changement de variable. Mais lequel ?

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f\left(\cos(x), \sin(x), \tan(x)\right)$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f\left(\cos(x), \sin(x), \tan(x)\right)$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f\left(\cos(x), \sin(x), \tan(x)\right)$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "$\mathrm{d}x$". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f(\cos(x), \sin(x), \tan(x))$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.
- Sinon, on pose $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Règles de Bioche

Règles

On pose d'abord $g(x) := f\left(\cos(x), \sin(x), \tan(x)\right)$. Puis, on introduit $\mathrm{d}\omega(x) := g(x)\mathrm{d}x$. Attention : on ne doit SURTOUT pas oublier le "dx". Rappel : $\mathrm{d}(-x) = -\mathrm{d}x$.

- Si $\mathrm{d}\omega(-x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \cos(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi - x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \sin(x)$.
- Si $\mathrm{d}\omega(\pi + x) = \mathrm{d}\omega(x)$, on pose $u := \tan(x)$.
- Sinon, on pose $u := \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Rappel

Si $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, alors : $\cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, $\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\tan(x) = \frac{2u}{1-u^2}$.

Idée générale

Rappels

On définit les fonctions hyperboliques ainsi :

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Idée générale

Rappels

On définit les fonctions hyperboliques ainsi :

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \; \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \; \tanh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Calcul pratique

Pour calculer une intégrale faisant intervenir ce genre de fonctions, on utilise le changement de variable $u := e^x$.