Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 1 : Intégration (Point de vue théorique).

Julian Tugaut

Sommaire

Plan

Définition

Primitive

Soit f une fonction continue d'un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, on dit que F est une primitive de f si F est une fonction dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

Définition

Primitive

Soit f une fonction continue d'un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, on dit que F est une primitive de f si F est une fonction dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

Si F est une primitive de f, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $F + \lambda$ est une primitive de f. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F_1 = F_2 + \lambda$.

Définition

Primitive

Soit f une fonction continue d'un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors, on dit que F est une primitive de f si F est une fonction dérivable telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.

Si F est une primitive de f, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $F + \lambda$ est une primitive de f. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F_1 = F_2 + \lambda$.

Linéarité

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f et si G est une primitive de g, alors $\alpha F + \beta G$ est une primitive de $\alpha f + \beta g$.

L'intégrale vue comme une aire

Définition

Soit une fonction continue f d'un intervalle $\mathcal{I} :=]a; b[$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale de f sur l'intervalle $]a; b[$ comme étant l'aire (comptée algébriquement) délimitée par les droites d'équations $(y = 0)$, $(x = a)$ et $(x = b)$ et par la courbe d'équation $(y = f(x))$. On la note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

L'intégrale vue comme une aire

Définition

Soit une fonction continue f d'un intervalle $\mathcal{I} :=]a; b[$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale de f sur l'intervalle $]a; b[$ comme étant l'aire (comptée algébriquement) délimitée par les droites d'équations $(y = 0)$, $(x = a)$ et $(x = b)$ et par la courbe d'équation $(y = f(x))$. On la note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque

Cette définition présuppose que cette aire a du sens.

L'intégrale vue comme une aire

Définition

Soit une fonction continue f d'un intervalle $\mathcal{I} :=]a; b[$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'intégrale de f sur l'intervalle $]a; b[$ comme étant l'aire (comptée algébriquement) délimitée par les droites d'équations $(y = 0)$, $(x = a)$ et $(x = b)$ et par la courbe d'équation $(y = f(x))$. On la note $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque

Cette définition présuppose que cette aire a du sens.

Relation de Chasles

Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Liens entre primitive et intégrale

Théorème

Soit une fonction continue f d'un intervalle ouvert $\mathcal{I}$ dans $\mathbb{R}$. Soit F **une** primitive de f. Alors, pour tous $a, b \in \mathcal{I}$, on a :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b := F(b) - F(a)\,.$$

Intégrales généralisées

Intégrale en $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x \,.$$

Intégrales généralisées

Intégrale en $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Cette limite peut ne pas exister.

Intégrales généralisées

Intégrale en $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Cette limite peut ne pas exister.

Intégrale en un point a où f n'est pas bornée

$$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Intégrales généralisées

Intégrale en $+\infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Cette limite peut ne pas exister.

Intégrale en un point a où f n'est pas bornée

$$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Remarque

Cette limite peut ne pas exister.

Valeur principale de Cauchy

Valeur principale de Cauchy en un point a où f n'est pas bornée

$$\mathrm{v.p.}\left(\int_{a-1}^{a+1} f(x)\mathrm{d}x\right) := \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int_{a-1}^{a-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\epsilon}^{a+1} f(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

Valeur principale de Cauchy

Valeur principale de Cauchy en un point a où f n'est pas bornée

$$\mathrm{v.p.}\left(\int_{a-1}^{a+1} f(x)\mathrm{d}x\right) := \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\left\{\int_{a-1}^{a-\epsilon} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+\epsilon}^{a+1} f(x)\mathrm{d}x\right\} .$$

Remarque

S'il y a convergence au sens habituel, il y a convergence au sens de la valeur principale de Cauchy.

Sommes de Riemann

Soit une fonction f continue sur l'intervalle $[a; b]$ avec $a < b$. On a alors la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \,.$$

Plan

Ensembles négligeables

Ensembles négligeables

Longueur d'un intervalle

Soit un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ avec $\mathcal{I} \neq \emptyset$. On note $a := \inf \mathcal{I} \geq -\infty$ et $b := \sup \mathcal{I} \leq +\infty$. Alors, la longueur de l'intervalle $\mathcal{I}$ est

$$l(\mathcal{I}) := b - a\,.$$

Éventuellement, cette longueur peut être égale à $+\infty$.

Ensembles négligeables

Longueur d'un intervalle

Soit un intervalle $\mathcal{I}$ de $\mathbb{R}$ avec $\mathcal{I} \neq \emptyset$. On note $a := \inf \mathcal{I} \geq -\infty$ et $b := \sup \mathcal{I} \leq +\infty$. Alors, la longueur de l'intervalle $\mathcal{I}$ est

$$l\,(\mathcal{I}) := b - a\,.$$

Éventuellement, cette longueur peut être égale à $+\infty$.

Ensemble de mesure nulle

Soit un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. On dit que A est négligeable (ou de mesure nulle) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille d'intervalles $\{\mathcal{I}_n^\epsilon\,;\; n \in \mathbb{N}\}$ telle que $\mathcal{I}_n^\epsilon \neq \emptyset$ pour tout n ainsi que

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n^\epsilon \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} l\,(\mathcal{I}_n^\epsilon) < \epsilon\,.$$

Exemple : $\mathbb{Q}$

L'ensemble des rationnels

Tout ensemble dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$) est de mesure nulle. En particulier, $\mathbb{Q}$ est négligeable.

Exemple : $\mathbb{Q}$

L'ensemble des rationnels

Tout ensemble dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$) est de mesure nulle. En particulier, $\mathbb{Q}$ est négligeable.

Preuve

On montre que tout ensemble dénombrable $\mathbb{E}$ est de mesure nulle. En effet, on peut écrire : $\mathbb{E} = \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Il suffit alors de considérer $\mathcal{I}_n^\epsilon := \left]x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\,;\, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right[$.

Contre-exemple : $]0;1[$

Tout intervalle ouvert non vide

Tout intervalle ouvert et non vide est non négligeable. En particulier, $]0;1[$ est n'est pas négligeable.

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Terme anglo-saxon

En Anglais, on écrit "$f = g$ a.e."

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Terme anglo-saxon

En Anglais, on écrit "$f = g$ a.e."

Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence :

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Terme anglo-saxon

En Anglais, on écrit "$f = g$ a.e."

Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence :

Pour toute fonction f, on a : $f = f$ p.p.

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \ : \ f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Terme anglo-saxon

En Anglais, on écrit "$f = g$ a.e."

Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence :
Pour toute fonction f, on a : $f = f$ p.p.
Si $f = g$ p.p. et si $g = h$ p.p. alors $f = h$ p.p.

Fonctions égales presque partout

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $\mathcal{I}$. On dit que f et g sont égales presque partout si $\{x \in \mathcal{I} \;:\; f(x) \neq g(x)\}$ est de mesure nulle. On note alors : "$f = g$ p.p."

Terme anglo-saxon

En Anglais, on écrit "$f = g$ a.e."

Relation d'équivalence

C'est une relation d'équivalence :
Pour toute fonction f, on a : $f = f$ p.p.
Si $f = g$ p.p. et si $g = h$ p.p. alors $f = h$ p.p.
Si $f = g$ p.p. alors $g = f$ p.p.

Définition

On appelle $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions sommables :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \,\mathrm{d}x < +\infty$$

où l'intégrale est au sens de Lebesgue.

$\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$

Définition

On appelle $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions sommables :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$$

où l'intégrale est au sens de Lebesgue.

Remarque

Pour les fonctions continues par morceaux, l'intégrale de Lebesgue est similaire à l'intégrale de Riemann.

Construction de $L^1(\mathbb{R})$ - 1

Classes d'équivalences

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle "classe d'équivalence de f" l'ensemble des fonctions g telles que $f = g$ p.p. Par définition, si $f = g$ p.p. on a : $||f - g||_1 = 0$. On note $\hat{f}$ la classe d'équivalence de f.
On définit $L^1(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalences :

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ \hat{f} \ ; \ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

Construction de $L^1(\mathbb{R})$ - 1

Classes d'équivalences

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle “classe d'équivalence de f” l'ensemble des fonctions g telles que $f = g$ p.p. Par définition, si $f = g$ p.p. on a : $||f - g||_1 = 0$. On note $\hat{f}$ la classe d'équivalence de f.
On définit $L^1(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalences :

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ \hat{f} \ ; \ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Construction de $L^1(\mathbb{R})$ - 1

Classes d'équivalences

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. On appelle "classe d'équivalence de f" l'ensemble des fonctions g telles que $f = g$ p.p. Par définition, si $f = g$ p.p. on a : $||f - g||_1 = 0$. On note $\hat{f}$ la classe d'équivalence de f.
On définit $L^1(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalences :

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ \hat{f} \ ; \ f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \right\} .$$

Il s'agit d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Remarque

On ne manipule donc plus des fonctions mais des classes d'équivalence. On ne fera plus la distinction subséquemment.

Construction de $L^1(\mathbb{R})$ - 2

Norme

Pour tout $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on introduit :

$$\left|\left|\hat{f}\right|\right|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x \geq 0$$

où f est **une** fonction de la classe d'équivalence $\hat{f}$. Alors, $|| \cdot ||_1$ est une norme.

Construction de $L^1(\mathbb{R})$ - 2

Norme

Pour tout $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, on introduit :

$$\left|\left|\hat{f}\right|\right|_1 := \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x \geq 0$$

où f est **une** fonction de la classe d'équivalence $\hat{f}$. Alors, $||\cdot||_1$ est une norme.

Remarque

Désormais, on notera f au lieu de $\hat{f}$.

Convergence et complétude

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$. La suite converge vers f dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si elle converge vers f pour la norme $||\cdot||_1$. En d'autres termes :

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_1 = 0\,.$$

On parle aussi de convergence en moyenne.

Convergence et complétude

Définition

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^1(\mathbb{R})$. La suite converge vers f dans l'espace $L^1(\mathbb{R})$ si et seulement si elle converge vers f pour la norme $||\cdot||_1$. En d'autres termes :

$$\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_1 = 0 \,.$$

On parle aussi de convergence en moyenne.

Espace complet

Toute suite de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R})$ est convergente. On dit aussi que $L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Définition

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

On définit $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des fonctions de carré sommable :

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x} < +\infty\,.$$

Définition

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$

On définit $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des fonctions de carré sommable :

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x} < +\infty \, .$$

$L^2(\mathbb{R})$

On définit l'espace $L^2(\mathbb{R})$ comme étant l'ensemble des classes d'équivalence des fonctions dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.

Convergence

Produit scalaire et norme

On munit $L^2(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f\,;\,g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

et de la norme $||\cdot||_2$. On dit donc qu'une suite $(f_n)_n$ de $L^2(\mathbb{R})$ converge vers f si $||f_n - f||_2$ tend vers 0. On parle aussi de convergence en moyenne quadratique.

Convergence

Produit scalaire et norme

On munit $L^2(\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$\langle f\,;\,g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

et de la norme $||\cdot||_2$. On dit donc qu'une suite $(f_n)_n$ de $L^2(\mathbb{R})$ converge vers f si $||f_n - f||_2$ tend vers 0. On parle aussi de convergence en moyenne quadratique.

Complétude

Muni de ce produit scalaire, $L^2(\mathbb{R})$ est complet. On dit que c'est un espace de Hilbert.

$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$: fonctions localement sommables

On définit $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ comme étant l'espace des fonctions (classes d'équivalences en fait) telles que $\int_K |f(x)| \, \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout intervalle compact (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$.

Autres espaces

Autres espaces

- Pour tout $k \geq 1$, on peut définir de la même manière l'espace $L^k(\mathbb{R})$ et on le munit de la norme $||f||_k := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^k \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}}$.

Autres espaces

- Pour tout $k \geq 1$, on peut définir de la même manière l'espace $L^k(\mathbb{R})$ et on le munit de la norme $||f||_k := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^k \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}}$.
- On considère $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ comme étant l'espace des fonctions telles que $\int_K |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < +\infty$ pour tout intervalle compact (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$.

Autres espaces

- Pour tout $k \geq 1$, on peut définir de la même manière l'espace $L^k(\mathbb{R})$ et on le munit de la norme $||f||_k := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^k \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{k}}$.
- On considère $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ comme étant l'espace des fonctions telles que $\int_K |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < +\infty$ pour tout intervalle compact (intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$.
- On considère aussi l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions telles que $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| < +\infty$.

Intégrale à paramètre - Continuité

Soit un segment $[a;b]$ fermé et borné de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction de $[a;b]\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est continue. On pose :

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\,.$$

Théorème

La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Intégrale à paramètre - Dérivabilité 1

Théorème

Si de plus, l'application $\frac{\partial f}{\partial t}$ existe et est continue sur $[a; b] \times \mathbb{R}$, alors l'application

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\,.$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x$.

Intégrale à paramètre - Dérivabilité 2

Théorème

Soit f une fonction de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $x \mapsto f(x,t)$ est continue, que l'application $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Également, il existe $\xi \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ positive telle que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq \xi(x)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. On pose :

$$\varphi(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\mathrm{d}x\,.$$

Alors, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi'(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x$.

Plan

Intégrabilité

Théorème

Si une fonction f est continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors elle est intégrable sur $\mathcal{D}$. Et, une fonction peut être intégrable même sans être continue.

Intégrabilité

Théorème

Si une fonction f est continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, alors elle est intégrable sur $\mathcal{D}$. Et, une fonction peut être intégrable même sans être continue.

Exemple

$$\iint_{|x|^2+|y|^2<1} \frac{xy}{x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\,.$$

Intégration sur un rectangle

Calcul pratique

Soit f une fonction continue sur un domaine $(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$. On suppose ici que le domaine d'intégration est "une boule pour la norme $||\cdot||_\infty$" c'est-à-dire un rectangle : $(\Delta) := [a; b] \times [c, d]$. On a alors :

Intégration sur un rectangle

Calcul pratique

Soit f une fonction continue sur un domaine $(\Delta) \subset \mathbb{R}^2$. On suppose ici que le domaine d'intégration est "une boule pour la norme $||\cdot||_\infty$" c'est-à-dire un rectangle : $(\Delta) := [a; b] \times [c, d]$. On a alors :

$$\iint_{(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \,.$$

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

et éventuellement, cette intégrale vaut l'infini.

Intégration sur tout $\mathbb{R}^2$

Théorème de Fubini

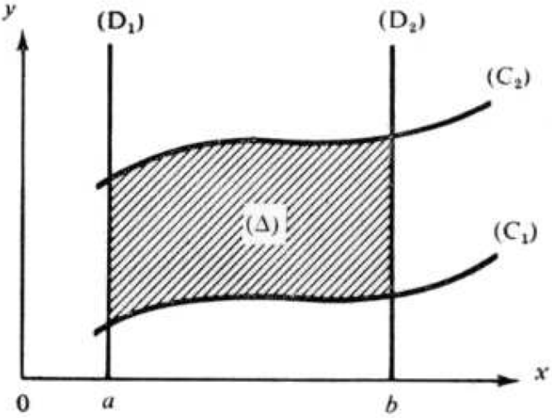
Si la fonction f est positive, alors on peut intervertir :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty}\left(\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

et éventuellement, cette intégrale vaut l'infini.

Si la fonction f n'est pas positive, on peut intervertir si l'on a $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$.

Domaine (Δ)



Sur un domaine délimité par deux droites verticales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ) défini par $(\Delta) := \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ a \leq x \leq b\}$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

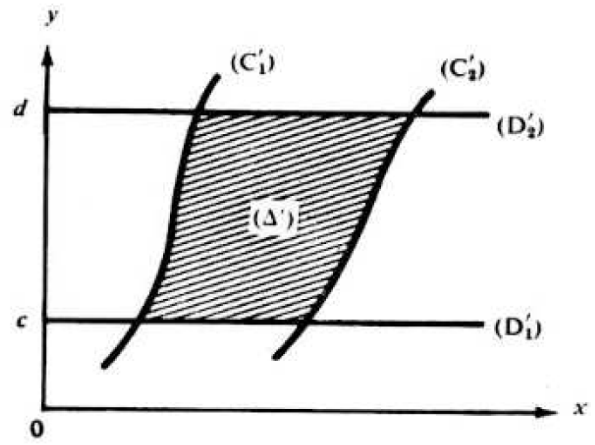
Sur un domaine délimité par deux droites verticales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ) défini par $(\Delta) := \{(x; y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\ a \leq x \leq b\}$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On calcule ainsi :

$$\iint_{(\Delta)} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x, y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x\,.$$

Domaine (Δ')



Sur un domaine délimité par deux droites horizontales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ') défini par $(\Delta') := \{(x; y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ c \leq y \leq d\}$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

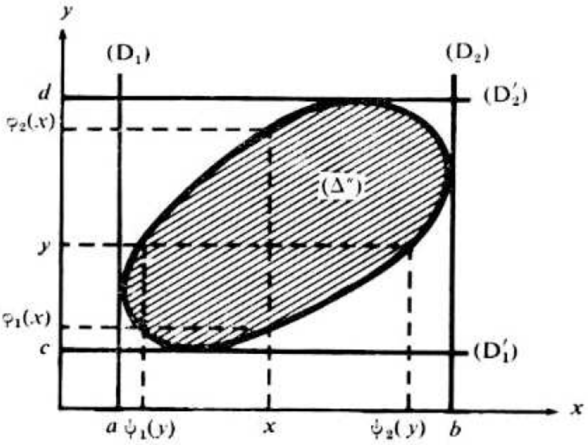
Sur un domaine délimité par deux droites horizontales

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ') défini par $(\Delta') := \{(x; y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\ c \leq y \leq d\}$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On calcule ainsi :

$$\iint_{(\Delta')} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,.$$

Domaine (Δ'')



Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus.

Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus. On peut alors écrire le domaine de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta'') &= \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\, a \leq x \leq b\} \\ &= \{(x;y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}\ .\end{aligned}$$

Sur un domaine convexe

Calcul

Soit f une fonction continue sur un domaine (Δ''). On suppose ici que le domaine (Δ'') est convexe, c'est-à-dire que toute droite ne rencontre sa frontière qu'en 2 points au plus. On peut alors écrire le domaine de la façon suivante :

$$\begin{aligned}(\Delta'') &= \{(x;y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),\, a \leq x \leq b\} \\ &= \{(x;y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y),\, c \leq y \leq d\}\ .\end{aligned}$$

On peut ainsi calculer :

$$\begin{aligned}\iint_{(\Delta'')} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\ .\end{aligned}$$

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes.

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par

$$\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right).$$

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par $\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$. Par ailleurs, on a $\mathcal{P}^{-1}(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Coordonnées polaires

Rappel

Il y a une bijection entre les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes. Notons $\mathcal{P}$ l'application bijective qui va de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi;\pi]$ et qui est définie par $\mathcal{P}(x,y) := \left(\sqrt{x^2+y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$. Par ailleurs, on a $\mathcal{P}^{-1}(r,\theta) := (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$.

Théorème

Soit une fonction continue f sur un domaine (Δ). Alors, on a

$$\iint_{(\Delta)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{P}((\Delta))} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\,.$$

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ce déterminant donne $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$.

Remarque

Le r supplémentaire ne doit surtout pas être oublié. Il traduit le volume de la transformation, à savoir la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ce déterminant donne $r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r$.

Utilisation des polaires

On utilise les polaires lorsque le domaine se définit facilement par le module et l'argument. Ainsi, on évite absolument d'utiliser les coordonnées polaires pour les rectangles. Mais, pour les domaines de la forme $\{x^2 + y^2 \leq R_0^2,\ \lambda x \leq y \leq \mu x\}$, on préfère les polaires.

Plan

Généralités

Calcul pratique et définition

Tout se passe comme avec les intégrales doubles. On peut également considérer des intégrales quadruples ou quintuples...

Généralités

Calcul pratique et définition

Tout se passe comme avec les intégrales doubles. On peut également considérer des intégrales quadruples ou quintuples...

Coordonnées cartésiennes

Le calcul en coordonnées cartésiennes est similaire à celui sur les intégrales doubles. Et, l'on peut intervertir sur un domaine borné pour peu que la fonction soit continue. On peut également intervertir si le module de la fonction est sommable sur $\mathbb{R}^3$.

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ).

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ). La bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques est donc

$$\mathcal{C}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right), z\right)$$

Coordonnées cylindriques

Équivalent des coordonnées polaires

Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Les coordonnées cylindriques consistent à transformer (x, y) en (r, θ). La bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques est donc

$$\mathcal{C}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right), z\right)$$

et ainsi

$$\mathcal{C}^{-1}(r, \theta, z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)\ .$$

Intégration en coordonnées cylindriques

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ).

Intégration en coordonnées cylindriques

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(\Delta)'} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,,$$

où $(\Delta)' := \mathcal{C}\left((\Delta)\right)$

Intégration en coordonnées cylindriques

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{(\Delta)'} f\left(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\,,$$

où $(\Delta)' := \mathcal{C}\left((\Delta)\right)$

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est r.

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées.

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées. On note $\mathcal{S}$ la bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times \left]-\pi, \pi\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et qui fait passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. On a :

$$\mathcal{S}^{-1}(r, \theta, \varphi) := (r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \ .$$

Définition des coordonnées sphériques

Coordonnées sphériques

Contrairement aux coordonnées cylindriques, les coordonnées sphériques modifient les trois coordonnées. On note $\mathcal{S}$ la bijection de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}_+ \times \left]-\pi, \pi\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et qui fait passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. On a :

$$\mathcal{S}^{-1}\left(r, \theta, \varphi\right) := \left(r\cos(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\right) .$$

La transformation $\mathcal{S}$ s'exprime comme suit

$$\mathcal{S}\left(x, y, z\right) := \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right.$$
$$\left., \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\right) .$$

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ).

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\mathcal{S}((\Delta))} f\left(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r^2 \cos\varphi \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.$$

Calcul d'une intégrale sur une boule

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} x^2y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Intégration en coordonnées sphériques - 1

Théorème

Soit une fonction f continue sur un domaine (Δ). On a alors :

$$\begin{aligned}&\iiint_{(\Delta)} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iiint_{\mathcal{S}((\Delta))} f\left(r\cos\theta\cos\varphi, r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\varphi\right) r^2\cos\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\,.\end{aligned}$$

Calcul d'une intégrale sur une boule

$$\iiint_{\{x^2+y^2+z^2\leq R^2\}} x^2y^2z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{4\pi}{945}R^9\,.$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{pmatrix}$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

Intégration en coordonnées sphériques - 2

Calcul du volume

La matrice sous-jacente est ici

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} \\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} & \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\varphi} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r\cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est $r^2\cos(\varphi) \geq 0$ puisque $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.