Bases Indispensables des Mathématiques

Chapitre 1 : Intégration (Limites et dérivation).

Julian Tugaut

Télécom Saint-Étienne

Sommaire

Plan

Limite finie en un point - 1

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathcal{I} :=]a; b[$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f converge vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si pour tout $\epsilon > 0$:

$$\exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0 + \delta(\epsilon)[\setminus\{x_0\} \ : \ |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Le réel l est appelé limite de f en x_0. On le note $l := \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Limite finie en un point - 2

Proposition

La fonction f tend vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $x_n \neq x_0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

Limite finie en un point - 2

Proposition

La fonction f tend vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $x_n \neq x_0$ pour tout n et $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

Contre-exemple

La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Limite finie en un point - 3

Proposition

On suppose $\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l_2$. Alors :

1. $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = l_1 + l_2$.
2. $\lim_{x\to x_0} (fg)(x) = l_1 l_2$.
3. $\lim_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha l_1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Si de plus $l_2 \neq 0$ et $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$,
   $$\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l_1}{l_2}.$$

Limite finie en un point - 4

Proposition

On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = l = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$. Alors, si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, on en déduit $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} h(x) = l$.

Limite finie en un point - 4

Proposition

On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l = \lim_{x \to x_0} g(x)$. Alors, si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, on en déduit $\lim_{x \to x_0} h(x) = l$.

Proposition

On suppose que $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$. Alors, si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, on en déduit $l_1 \leq l_2$.

Limite à gauche

Définition

On dit que f converge à gauche vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0[\, : \ |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Le réel l est appelé limite à gauche de f en x_0. On le note $l := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $f(x_0^-)$.

Limite à gauche

Définition

On dit que f converge à gauche vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0 - \delta(\epsilon); x_0[\ : \ |f(x) - l| < \epsilon \,.$$

Le réel l est appelé limite à gauche de f en x_0. On le note $l := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ou $f(x_0^-)$.

Proposition

La fonction f tend à gauche vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ et $x_n < x_0$ pour tout n, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l \,.$$

Limite à droite

Définition

On dit que f converge à droite vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0; x_0 + \delta(\epsilon)[\ : \ |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Le réel l est appelé limite à droite de f en x_0. On le note $l := \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $f(x_0^+)$.

Limite à droite

Définition

On dit que f converge à droite vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x \in]x_0; x_0 + \delta(\epsilon)[: \ |f(x) - l| < \epsilon \,.$$

Le réel l est appelé limite à droite de f en x_0. On le note $l := \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ ou $f(x_0^+)$.

Proposition

La fonction f tend à droite vers l quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ et $x_n > x_0$ pour tout n, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \,.$$

Limites et monotonie

Proposition

Si la fonction f est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) et bornée (c'est-à-dire majorée et minorée), elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intervalle.

Limites et monotonie

Proposition

Si la fonction f est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) et bornée (c'est-à-dire majorée et minorée), elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intervalle.

Remarque

Ces deux limites ne sont pas forcément égales.

Limites et monotonie

Proposition

Si la fonction f est monotone (c'est-à-dire croissante ou décroissante) et bornée (c'est-à-dire majorée et minorée), elle admet une limite à gauche et une limite à droite en tout point de l'intervalle.

Remarque

Ces deux limites ne sont pas forcément égales.

Définition

Une fonction est dite càdlàg sur $\mathbb{R}$ si en tout point $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ existe et si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Limite et limites à gauche et à droite

Proposition

On a l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.
- $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l$.

Limites infinies - 1

Définition

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si pour tout $H > 0$,

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus \{x_0\} \ : \ f(x) > H .$$

Limites infinies - 1

Définition

On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si pour tout $H > 0$,

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus \{x_0\} \ : \ f(x) > H\,.$$

Proposition

La fonction f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $x_n \neq x_0$ pour tout n et $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = +\infty\,.$$

Limites infinies - 2

Définition

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si pour tout $H > 0$,

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus \{x_0\} \ : \ f(x) < -H \, .$$

Limites infinies - 2

Définition

On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et l'on note $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si pour tout $H > 0$,

$$\exists \delta(H) > 0 \text{ t.q. } \forall x \in]x_0 - \delta(H); x_0 + \delta(H)[\setminus\{x_0\} \ : \ f(x) < -H \, .$$

Proposition

La fonction f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $x_n \neq x_0$ pour tout n et $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = -\infty \, .$$

Limite en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction de $]a; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x > H(\epsilon) \ : \ |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Limite en $+\infty$

Définition

Soit f une fonction de $]a;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ si

$$\forall\epsilon > 0\ \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x > H(\epsilon)\ :\ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Proposition

La fonction f tend vers l quand x tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l\,.$$

Limite en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction de $]-\infty; a[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ si

$$\forall\epsilon > 0 \ \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x < -H(\epsilon) \ : \ |f(x) - l| < \epsilon\,.$$

Limite en $-\infty$

Définition

Soit f une fonction de $]-\infty; a[$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$ si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists H(\epsilon) > 0 \text{ tel que } \forall x < -H(\epsilon) \; : \; |f(x) - l| < \epsilon \, .$$

Proposition

La fonction f tend vers l quand x tend vers $-\infty$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ satisfaisant $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$, on a

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = l \, .$$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1.$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0.$

Quelques limites classiques

À connaître par cœur

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\log(x) = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0.$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty.$

Plan

Continuité en dimension un - 1

Définition

La fonction f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Continuité en dimension un - 1

Définition

La fonction f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque

La fonction f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Continuité en dimension un - 2

Proposition

Si f et g sont continues en x_0, il en est de même pour $f+g$, fg et αf. Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 également.

Continuité en dimension un - 2

Proposition

Si f et g sont continues en x_0, il en est de même pour $f+g$, fg et αf. Si de plus $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 également.

Théorème

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $y_0 := f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ définie par $(g \circ f)(x) := g\left(f(x)\right)$ est continue en x_0.

Continuité en dimension deux - 1

Fonction continue en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \; \text{ tel que si } |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \alpha^2 \text{, on a :}$$
$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \,.$$

Continuité en dimension deux - 1

Fonction continue en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \alpha > 0 \; \text{ tel que si } |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \alpha^2 \text{, on a :}$$
$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \, .$$

Attention

Une fonction peut vérifier $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ et $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ sans être continue.

Continuité en dimension deux - 1

Fonction continue en un point

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en un point (x_0, y_0) si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \alpha > 0 \ \text{ tel que si } |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \alpha^2 \text{, on a :}$$
$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \epsilon \, .$$

Attention

Une fonction peut vérifier $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$ et $\lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$ sans être continue.

Exemple

La fonction définie par $f(x, y) := \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'est pas continue. En effet, si l'on passe en polaire, on a :$f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$.

Continuité en dimension deux - 2

Fonction continue sur un domaine

Soit f une fonction d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en (x_0, y_0) pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Continuité en dimension deux - 2

Fonction continue sur un domaine

Soit f une fonction d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^2$. On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si f est continue en (x_0, y_0) pour tout $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.

Exemple

La fonction définie par $f(x, y) := \frac{xy}{x^2+y^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Plan

Dérivée d'ordre un en dimension un - 1

Définition

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel que l'on note $f'(x_0)$ tel que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}\,.$$

Dérivée d'ordre un en dimension un - 1

Définition

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel que l'on note $f'(x_0)$ tel que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Proposition

Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

1. $f + g$ est dérivable en x_0. De plus $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

1. $f+g$ est dérivable en x_0. De plus $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0. De plus $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

1. $f+g$ est dérivable en x_0. De plus $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0. De plus $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. αf est dérivable en x_0. De plus $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

1. $f+g$ est dérivable en x_0. De plus $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0. De plus $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
3. αf est dérivable en x_0. De plus $(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$.
4. Si de plus $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0. Et, $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 2

Proposition

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors :

1. $f+g$ est dérivable en x_0. De plus $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.
2. fg est dérivable en x_0. De plus $(fg)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.
3. αf est dérivable en x_0. De plus $(\alpha f)'(x_0)=\alpha f'(x_0)$.
4. Si de plus $f(x_0)\neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0. Et, $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0)=-\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$.
5. Si de plus $g(x_0)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0. Et, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Dérivée d'ordre un en dimension un - 3

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 := f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} g\left(f(x)\right) = (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) g'\left(f(x_0)\right) .$$

Dérivée d'ordre un en dimension un - 3

Théorème

Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en $y_0 := f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0. De plus :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0} g\left(f(x)\right) = (g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'\left(f(x_0)\right) .$$

Preuve

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\longrightarrow g'(f(x_0))} \times \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\longrightarrow f'(x_0)} .$$

Quelques dérivées à connaître par cœur

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^{\alpha}$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^{\alpha}$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
4. Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
4. Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
5. Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
4. Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
5. Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
6. Si $f(x) = \tan(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
4. Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
5. Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
6. Si $f(x) = \tan(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
7. Si $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

Quelques dérivées à connaître par cœur

1. Si $f(x) = x^\alpha$, alors $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$.
2. Si $f(x) = \log|x|$ pour $x \neq 0$, alors $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.
3. Si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
4. Si $f(x) = \sin(x)$, alors $f'(x) = \cos(x)$.
5. Si $f(x) = \cos(x)$, alors $f'(x) = -\sin(x)$.
6. Si $f(x) = \tan(x)$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$.
7. Si $f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.
8. Si $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, alors $f'(x) = \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

Dérivabilité d'ordre un en dimension supérieure

On peut être amené à considérer des fonctions dépendant de plusieurs paramètres. Exemple : $f(x,u) = \frac{x}{1+u^2}$.
La dérivée partielle par rapport à x consiste à dériver la fonction de x en considérant que u est une constante.
Exemple : $\frac{\partial}{\partial x} f(x,u) = \frac{1}{1+u^2}$.
De même, $\frac{\partial}{\partial u} f(x,u) = -\frac{2xu}{(1+u^2)^2}$.

Dérivées d'ordre supérieur - 1

Définition

La dérivée d'ordre 2 est la fonction dérivée de f'. On la note f''.

Dérivées d'ordre supérieur - 1

Définition

La dérivée d'ordre 2 est la fonction dérivée de f'. On la note f''.

Définition

La dérivée d'ordre 3 est la fonction dérivée de f''. On la note $f^{(3)}$.

Dérivées d'ordre supérieur - 1

Définition

La dérivée d'ordre 2 est la fonction dérivée de f'. On la note f''.

Définition

La dérivée d'ordre 3 est la fonction dérivée de f''. On la note $f^{(3)}$.

Définition

Pour tout $n \geq 4$, la dérivée d'ordre n est la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$. On la note $f^{(n)}$.

Dérivées d'ordre supérieur - 2

Formule de Leibniz

Soient deux fonctions f et g dérivables à l'ordre n en un point x_0. Alors, la fonction fg est dérivable n fois en x_0 et de plus

$$(fg)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)\,,$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Quelques applications - 1

Théorème

Soit $x_0 \in \mathcal{I}$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\subset \mathcal{I}$ pour ϵ assez petit. On suppose que f est dérivable en x_0 et que f admet un extremum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.

Quelques applications - 1

Théorème

Soit $x_0 \in \mathcal{I}$ tel que $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\subset \mathcal{I}$ pour ϵ assez petit. On suppose que f est dérivable en x_0 et que f admet un extremum local en x_0. Alors $f'(x_0) = 0$.

Remarque

La réciproque est fausse. Exemple : $f(x) := x^3$. $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local de f.

Quelques applications - 2

Proposition

On suppose que f est continue et dérivable sur $\mathcal{I}$. Alors :

- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement croissante sur $\mathcal{I}$.
- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$, f est strictement décroissante sur $\mathcal{I}$.
- f est constante sur $\mathcal{I}$ si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{I}$.